Вычисление сил, действующих на двигающееся в среде тело.

Якубовский Е.Г.

Аннотация

Проблема вычисления сил, действующих движущееся в среде тело, решается с помощью эксперимента в аэродинамических трубах и полученных на этой основе эмпирических формул. Предлагается формула, определяющая, действующую на тело силу. Из условия минимизации силы сопротивления, и увеличения подъемной силы можно вычислить профиль, определяющий оптимальный режим.

Ключевые слова: комплексное решение, уравнение Навье – Стокса, оптимальный профиль.

Calculation of the forces acting on the moving body.

Yakubovski EG

Annotation

The problem of calculating the forces acting moving body is decided by an experiment in a wind tunnel and received on the basis of this empirical formula. It proposed a formula that determines the force acting on the body. From the condition of minimizing the drag force and lift profile can be calculated, which determines the optimal mode.

Keywords: complete solution, Navier - Stokes equations, the optimal profile.

1. Определение турбулентного решения в следе

Этот раздел нужен для того, чтобы доказать, что в турбулентном режиме у симметричного относительно направления движения тела след расположен не симметрично, а зависит от формы симметричного тела. Ламинарное и турбулентное решение представим в виде

$$(R_l - R_\alpha)/R_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^{\gamma n*} \quad ,$$
$$(R_t - R_\alpha)/R_0 = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} (\ln z)^{*m} / z^{\gamma n*} \tag{1.1}$$

где R_α определяется скоростью системы координат, R_l, R_t ламинарное и турбулентное решение уравнения Навье – Стокса. Первая формула описывает ламинарное решение, а вторая формула турбулентное решение уравнения Навье – Стокса. При этом коэффициент γ считается по формуле $\gamma = (2k+1)/2, k = 1$. При этом число Рейнольдса тела равно $R_0 = \frac{aV_0}{\nu}$, где a, V_0 возможно имеют комплексные значения и V_0 скорость тела, относительно скорости жидкости на бесконечности. Величина z комплексная координата точки потока. При этом коэффициенты a_n, a_{nm} определяются независимо от числа Рейнольдса R_0. Т.е. изменение фазы тела $\arg a$ оказывает непосредственное изменение силы сопротивления потока, что следует из формулы (2.1).

При этом уравнение Лапласа запишется в виде

$$\Lambda\Lambda^* R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0,$$

которое тоже имеет решение в виде (1.1).

Где введены операторы

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial iy},$$

$$\Lambda^* = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial iy},$$

При этом имеем $\Lambda^* z = 0, \Lambda^* \ln z = 0$.

Запишем уравнения Навье - Стокса относительно компонент скорости в декартовой системе координат относительно переменных (x, y)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_x}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla))V_x = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\Delta V_x \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla))V_y = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\Delta V_y \end{cases},$$

относительно числа Рейнольдса потока, равного $R = R_x + iR_y$, уравнение Навье - Стокса запишется в виде

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} + (R^* \Lambda^* R - R\Lambda^* R^*)/2 = -\frac{1}{\rho}\Lambda^* P + \Lambda^* \Lambda R,$$

Величина R является комплексной функцией. Величины в конвективном члене $R_x(z), R_y(z)$ выражаются через комплексные функции R и R^* с учетом уравнения неразрывности. Комплексное уравнение Навье - Стокса получено из двух уравнений Навье - Стокса, которые разделили на величину $\nu^2/|a|^3$, где ν - кинематическая вязкость, a комплексный размер тела. При этом координаты x, y безразмерные величины и равны отношению $x/|a|, y/|a|$. В уравнении неразрывности тоже необходимо произвести замену координат на действительную безразмерную величину $x/|a|, y/|a|$. Время τ тоже безразмерно и равно величине $\tau = t\nu/|a|^2$.

Опишем турбулентное решение. Свяжем скорость системы координат, со скоростью тела относительно бесконечности. Если тело относительно бесконечности неподвижно, то система координат неподвижна $R_\alpha = 0$ и жидкость в этой системе координат движется на бесконечности со скоростью $-R_0$, так как $a_{00} = -1$. Если тело относительно бесконечности двигается со скоростью R_0, система координат двигается со скоростью равной R_0 и жидкость на бесконечности в этой системе координат неподвижна. При этом граничные условия определятся из условия $R_l = R_\alpha$. Коэффициенты a_{nm} и γ найдем из условия представления нулевого члена минус единицей $a_{00} = -1$ с помощью метода наименьших квадратов при условии $s = 1$, т.е. на границе тела.

$$\min \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{ns} \exp(i\gamma nw)(-iw)^s] \times$$
$$\times [1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^* \exp(-i\gamma mw)(iw)^k] dw ,$$

т.е. равенство скорости жидкости, на поверхности тела, и скорости тела. Для коэффициентов a_{mk}^* получаем линейное уравнение, дифференцируя по величине a_{ns} Угол w отсчитывается от горизонтального направления.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\gamma nw)(-iw)^s [1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}^* \exp(-i\gamma mw)(-iw)^k] dw = 0 .$$

Это уравнение для круга имеет комплексные коэффициенты a_{mk}^*. В самом деле интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\gamma nw) dw = \frac{\exp(i\gamma n\pi) - \exp(-i\gamma n\pi)}{i\gamma n} = 2\sin \gamma n\pi / \gamma n$ действителен. Но интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\gamma nw) w dw = \frac{\exp(i\gamma nw) w}{i\gamma n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\gamma nw)}{i\gamma n} dw = \frac{\pi \cos(\gamma n\pi)}{i\gamma n} - \frac{2\sin(\gamma nw)}{i(\gamma n)^2}$$

является мнимым. Значит коэффициенты, ряда, описывающего турбулентное комплексное решение комплексные. В случае ламинарного решения коэффициенты ряда действительные.

Определим давление в виде

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} [P_{nm} (\ln z)^m / z^{\gamma n} + P_{nm}^* (\ln z)^{*m} / z^{*\gamma n}]$$

Подставим давление с этим членом в уравнение Навье Стокса, получим выражение

$$P_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} \frac{\exp(in\gamma w)}{s^{n\gamma}} (\ln s - iw)^k .$$

Уравнение Навье Стокса с этим членом, умноженное на величину $\exp(i\xi\gamma w)(\ln s - iw)^\eta / s^{\gamma\xi}, \xi > 0$, где ξ, η нечетные величины и проинтегрированное по пространству, определит изменение давления. При этом распределение давления определяется формулой

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tau} h_{\xi\eta}(a_n) + |R_0|^2 \sum_{n,m,p,q=1}^{N} d_{\xi\eta nmpq} a_{nm} a^*_{pq} =$$
$$= -\sum_{n,m=1}^{N} M_{\xi\eta nm} P^*_{nm}(\tau), \xi,\eta = 1,...,...$$

Определяется комплексное решение $P^*_{nm}(\tau)$, которое совместно с комплексно сопряженной величиной определяет действительное давление. Диагональные элементы матрицы $M_{\xi\eta nm}$ положительны, в силу интеграла от произведения комплексно сопряженных функций. Действительная часть матрицы $\sum_{n,m,p,q=1}^{N} d_{\xi\eta nmpq} a_{nm} a^*_{pq}$ положительно определена в силу нечетности ξ,η. В изменение R_0 определится из уравнения движения, которое описано по формуле (2.3), а в случае стационарного режима член $\frac{\partial R_0}{\partial \tau}$ равен нулю и устанавливается постоянное распределение давления. Причем сумма $P + P^*$ отрицательна.

Определим значения радиуса $s = s(R_0, w)$, при котором угловая компонента решения $\operatorname{Im}\ln R_0 R(s,w) = \operatorname{Im}\ln R(s,w) + \arg a_+ + \arg V_0 = 0$ обращается в ноль. Причем из этого уравнения определится верхняя граница следа. Нижняя граница следа определится из уравнения $\operatorname{Im}\ln R_0 R(s,w) = \operatorname{Im}\ln R(s,w) + \arg a_- + \arg V_0 = 0$. Эта величина определена с точностью до фазы тела $\arg a_\pm$, так как величина $\arg a_\pm$ входит слагаемым в данную формулу. Это значение соответствует возвратному течению, т.е. скорости, направленной к границе с ее разных сторон, и не реализуется как невозможное. Причем в зависимости от фазы формы тела направление следа меняется. При этом меняется и направление действующей на тело со стороны следа силы. След не расположен за телом, а находится, под некоторым углом к телу, даже у симметричного тела. Но след образуется с двух сторон тела, причем у симметричного тела след симметричен в ламинарном режиме.

При условии на коэффициент асимметрии $s=0, s=1, \arg V_0 = 0$, получим по формуле (3.6) $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2 = 0$ уравнение $\arg R[s_\pm(w), w] = -\arg a_\pm$, которое имеет две ветви решения $s(w)$, причем $w_{\max} = -w_{\min}, s_+(w) = s_-(w)$ в ламинарном режиме, когда коэффициенты ряда $R(s,w)$ действительны. Причем в случае сферы имеем две ветви решения $\arg R[s_\pm(w), w] = 0$, при условии $\arg a_+ = 0, \arg a_- = 0$. У не симметричного тела появляется отличная от нуля фаза формы тела, асимметрия в следе и возникновение вертикальной силы в ламинарном режиме.

При комплексных коэффициентах ряда $R(s,w)$, что наблюдается в турбулентном режиме, появляется асимметрия в описании следа даже в случае симметричного тела при условии $\arg V_0 = 0$.

При этом след заключен между углами $w_{\min}(\arg a), w_{\max}(\arg a)$, создавая подъемную в направлении, соответствующем, но не противоположном, направлению следа. Расположение следа не обязательно за поверхностью тела является экспериментальным фактом. У бесконечной плоскости тоже происходит отрыв пограничного слоя, что по его построению эквивалентно образованию следа, границей которого, является возвратное течение. Причем он наблюдается на некотором расстоянии от передней кромки плоскости и даже для конечной длинной пластины наблюдается на некотором расстоянии от передней кромки пластины.

При этих условиях соотношение $s = s(R_0, w)$ определяет границу n - ой турбулентной области. Таких областей имеется множество, так как бесконечный ряд имеет счетное количество корней. Первую турбулентную область образуют радиусы $[a_0(w), a_1(w)]$, вторую $[a_1(w), a_2(w)]$ и т.д. Соседние турбулентные зоны имеют общие области, через которые и двигается турбулентная жидкость. При этом жидкость из следа обратно в во внешнюю область не поступает, так как обратного течения нет.

При этом граница пограничного слоя определяется из решения уравнения $\operatorname{Re}\ln R_0 R(s,w) = \operatorname{Re}\ln R(s,w) = 0$ относительно функции $s = s(w)$, т.е. жидкость по радиусу s из слоя не вытекает, а двигается по касательной к границе пограничного слоя. При этом эта область не охватывает тело полностью, а занимает боковые грани тела, так как продольные по скорости области (вдоль оси $0x_3$) не удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\ln R(s,w) = 0$.

При этом уравнение Навье Стокса и неразрывности будет иметь то же решение, но для конечной области. Тогда решение уравнения Навье Стокса будет

$$(R_l - R_\alpha)/R_0 = \sum_{n,m=-N}^{N} b_{nm} \exp(in\Phi + im\ln\rho). \qquad (1.2)$$

Где введена новая масштабированная угловая переменная $\Phi = 2\pi(w - w^{\min})/(w^{\max} - w^{\min})$, где $w^{\max}, w^{\min}$ - экстремальные значения границ турбулентной зоны. Кроме того, введем масштабированный радиус

$$\ln\rho = \frac{\ln s / a^{\min}(w)}{\ln[a^{\max}(w)/a^{\min}(w)]} 2\pi,$$

где $a^{\max}(w), a^{\min}(w)$- максимальное и минимальное значение радиуса границы турбулентной зоны. В случае равенства нулю знаменателя, для величины s следует использовать значение $s = \sqrt{a^{\max}(w)a^{\min}(w)}$. Тогда величина $\ln\rho$ будет непрерывна и в этой точке равна π. Коэффициенты b_{nm} определятся из значений ламинарного решения в пределах границы турбулентной зоны $s = a^{\min}(w), s = a^{\max}(w)$, где $w \in [w^{\min}, w^{\max}]$.

Коэффициенты b_{nm} определятся по формуле

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_l[s(\ln\rho,\Phi), w(\Phi)] \exp(-in\Phi - im\ln\rho) d\ln\rho d\Phi = \\ = b_{nm}/4\pi^2 .$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются и границы области в координатах s, w не прямоугольные (в координатах $\Phi, \ln\rho$ скорость на границе переменная), ряд будет разрывный и значит, коэффициент b_{nm} убывает при условии $n, m \to \infty$ как $b_{nm} \sim 1/(nm)$, т.е. это турбулентное дискретное решение. Дело в том, что решение в начальный момент времени в координатах s, w непрерывно, а в координатах $\ln\rho, \Phi$ дискретно, в силу дискретности функций $s(\ln\rho, \Phi), w(\Phi)$. Но так как описание следа и пограничного слоя введется в относительно координат $\ln\rho, \Phi$, след и пограничный слой является дискретным. Они образуют либо вихревую дорожку, либо являются пульсирующим турбулентным решением.

Формулу (1.2) можно переписать в виде

$$\sum_{n,m=-N}^{N} b_{nm} \exp(in\Phi + im\ln\rho) = \sum_{n,m=0}^{N} A_{nm} \operatorname{sgn}(\Phi - \Phi_n^0)\operatorname{sgn}(\Phi_n^1 - \Phi) \operatorname{sgn}(\ln\rho - \ln\rho_m^0)\operatorname{sgn}(\ln\rho_m^1 - \ln\rho), \quad (1.3)$$

где в данном случае имеем $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ и тогда скачок с амплитудой A_{nm} и фазой $\Phi_n^0, \ln\rho_m^0, \Phi_n^1, \ln\rho_m^1$, определится из уравнений

$$4\pi^2 b_{nm} = \sum_{p,q=1}^{N} A_{pq} \sin[n(\Phi_p^1 - \Phi_p^0)/2]\exp[in(\Phi_p^0 + \Phi_p^1)/2] \sin[m(\ln\rho_q^1 - \ln\rho_q^0)/2]\exp[im(\ln\rho_q^0 + \ln\rho_q^1)/2]/(nm),$$

где индексы $n, m = -N, ..., -1, 1, ..., N$.

Отметим, что $A_{00} = b_{00}$. Если ряд, стоящий в левой части (1.2) непосредственно не суммируется, требуя большого числа членов, то правая часть (1.2) определит его дискретную сумму при конечном числе членов. Отметим, что

$$\Phi_n^0 + 2\pi p \le \Phi_n \le \Phi_n^1 + 2\pi p, \ln\rho_m^0 + 2\pi q \le \ln\rho_m \le \ln\rho_m^1 + 2\pi q$$

почти периодическая координата скачка.

При определенной скорости потока ближайшая к телу турбулентная зона может достигнуть границы тела. При этом перестраивается решение, в силу других граничных условий, т.к. турбулентная зона выходит на поверхность тела в конечном секторе.

Почему же турбулентное решение носит пульсирующий характер? Граница турбулентной области в силу дискретности турбулентного решения не гладкая функция, в отличие от ламинарного решения. Это приводит к пульсации границы и точек, в которых мнимая часть скорости обращается в ноль. Это приводит к нестационарной пульсации коэффициентов $w_{\max}(t), w_{\min}(t), a_{\max}(t,w), a_{\min}(t,w)$, следовательно, пульсации $b_{nm}(t)$.

Так как граница пульсирует вместе с решением, т.е. имеем зависимость $b_{nm}(t)$.

При этом в формуле

$$\ln\rho = \frac{\ln s / a^{\min}(t,w)}{\ln[a^{\max}(t,w)/a^{\min}(t,w)]} 2\pi .$$

имеем границы изменения s, определяются по формуле $s = [a^{\min}(t,w), a^{\max}(t,w)]$. Причем при условии $a^{\min}(t,w) = a^{\max}(t,w)$, имеем $\ln\rho = \pi$. Коэффициенты $b_{nm}(t)$ определятся из решения (1.3) по формуле

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_l[s(t,\ln\rho,\Phi), w(t,\Phi)]\exp(-in\Phi - im\ln\rho) d\ln\rho d\Phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_l[s(t,\ln\rho,\Phi), w(t,\Phi)]\exp(-in\Phi - im\ln\rho) d\ln\rho d\Phi =. \qquad (1.4)$$

$$= b_{nm}(t)/(4\pi^2)$$

Так как граничные значения в начале и конце периода отличаются, и границы турбулентной области не прямоугольные, ряд будет разрывный и значит, коэффициент b_{nm} убывает при условии $n,m \to \infty$ как $b_{nm} \sim 1/(nm)$, т.е. это турбулентное дискретное решение.

Формулу (1.12) можно переписать в виде

$$\sum_{n,m=-N}^{N} b_{nm}(t)\exp\{in\Phi + im\ln\rho\} =$$
$$= \sum_{n,m=0}^{N} A_{nm}(t)\operatorname{sgn}[\Phi - \Phi_n^0(t)]\operatorname{sgn}[\Phi_n^1(t) - \Phi], \quad (1.5)$$
$$\operatorname{sgn}[\ln\rho - \ln\rho_m^0(t)]\operatorname{sgn}[\ln\rho_m^1(t) - \ln\rho]$$

тогда скачок с амплитудой $A_{nm}(t)$ и фазой $\Phi_n^0(t), \ln\rho_m^0(t), \Phi_n^1(t), \ln\rho_m^1(t)$, определится из уравнений

$$4\pi^2 b_{nm}(t) = \sum_{p,q=1}^{N} A_{pq}(t)\sin[n(\Phi_p^1(t) - \Phi_p^0(t))/2]\exp[in(\Phi_p^0(t) + \Phi_p^1(t))/2]$$
$$\sin[m(\ln\rho_q^1(t) - \ln\rho_q^0(t))/2]\exp[im(\ln\rho_q^0(t) + \ln\rho_q^1(t))/2]/(nm) \quad ,(1.6)$$

где индексы $n, m = -N,...,-1,1,..., N$. При этом в силу того, что $b_{nm}(t) \sim \alpha(t)/(nm)$ при условии $n, m \to \infty$ коэффициенты $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln\rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln\rho_q^1(t)$ определятся не зависящими от индексов n, m.

При этом граница турбулентного следа, определяемая как

$$\operatorname{Im}\ln\{\sum_{n,m=0}^{N} A_{nm}(t)\operatorname{sgn}[\Phi - \Phi_n^0(t)]\operatorname{sgn}[\Phi_n^1(t) - \Phi]$$
$$\operatorname{sgn}[\ln\rho - \ln\rho_m^0(t)]\operatorname{sgn}[\ln\rho_m^1(t) - \ln\rho]\} = 0 \quad , \qquad (1.7)$$

и выраженная в виде зависимости $\ln\rho = g(t,\Phi)$, зависит от времени. Коэффициенты уравнения (1.6) $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln\rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln\rho_q^1(t)$, зависящие от времени, определяются из решения нелинейной системы уравнений (1.4), (1.6), (1.7). Уравнение (1.7) определяет границу турбулентной области. Нелинейная система уравнений (1.6), определяет значения коэффициентов $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln\rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln\rho_q^1(t)$. Уравнение (1.4) определяет коэффициенты $b_{nm}(t)$.

Составим систему дифференциальных уравнений по определению изменения переменных $b_{nm}(t)$, $A_{pq}(t), \Phi_p^0(t), \ln\rho_q^0(t), \Phi_p^1(t), \ln\rho_q^1(t), \ln\rho(t,\Phi)$ вместо нелинейных уравнений, и тогда решать нелинейную систему уравнений (1.6) придется один раз для определения начальных условий. Уравнение (1.6) имеет вид

$$\sum_{p,q=1}^{N} a_{nmpq}(t)\frac{dA_{pq}}{dt} + \sum_{p=1}^{N}\,[f_{np}^{0}(t)\frac{d\Phi_p^0}{dt} + f_{np}^{1}(t)\frac{d\Phi_p^1}{dt}] + $$
$$+\sum_{q=1}^{N}\,[g_{mq}^{0}(t)\frac{d\ln\rho_q^0}{dt} + g_{mq}^{1}(t)\frac{d\ln\rho_q^1}{dt}] = \frac{db_{nm}(t)}{dt}.$$

где индексы $n,m = -N,\ldots,-1,1,\ldots,N$, а величина A_{pq} возможно комплексная. Причем величина $db_{nm}(t)/dt$ определяется из уравнения (1.4), которое имеет вид

$$\frac{db_{nm}(t)}{dt} = F_{nm}(t,\ln\rho,\Phi)$$

Уравнение (1.7) определяет границу турбулентной области $\ln\rho = g(t,\Phi)$, и величина радиуса определяется из дифференциального уравнения с параметром Φ

$$a(t,\Phi)\frac{d\ln\rho(t,\Phi)}{dt} = b(t,\Phi)\,.$$

При этом если граница пограничного слоя или следа стационарна, то наблюдается ламинарный режим, а если она пульсирует, то наблюдается нестационарный турбулентный режим, говорят о турбулизации пограничного слоя или следа. При этом в случае ламинарного режима, решение в следе и пограничном слое не совпадает с решением во всем пространстве, оно в частности образует вихревую дорожку, а в общем случае неоднородно.

Для реализации стабильного движения тела, во-первых, необходимо не допускать выхода турбулентной зоны на поверхность тела, а во-вторых, в случае не выполнения первого пункта, необходимо стабилизировать границу турбулентной зоны. Тогда режим будет стационарный, т.е. не будет зависимости коэффициентов b_{pq} от времени. Для стабилизации границы турбулентной зоны необходимо, чтобы дискретные скачки скорости потока не выходили на границу турбулентной зоны. Этого можно достигнуть только выбором формы тела, отражаемой в фазе число Рейнольдса.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса тела, вернее изменение фазы числа Рейнольдса тела, и, следовательно, изменение размера тела, и значит, происходит увеличение модуля числа Рейнольдса. Первая турбулентная зона, касается своей дальней частью поверхности тела, и начинает работать вторая турбулентная зона, с меньшим охватом поверхности тела. Сопротивление при этом упадет и возникает кризис сопротивления.

2. Определение сил, действующих на тело

Определим подъемную силу и силу сопротивления тела, помещенного в поток или двигающегося в жидкости, с учетом давления. По теореме импульсов она равна для одного тела см.[1]

$$\begin{gathered} F = \rho a \int_{-\pi}^{\pi} \int_{s(w)}^{\infty} V^2 dsdw + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{s(w)}^{\infty} (P + P^*) dsdw = \\ = \rho v^2 / a \int_{-\pi}^{\pi} \int_{1}^{\infty} R^2 R_0^2 dsdw + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{1}^{\infty} (P + P^*) dsdw \end{gathered} . \quad (2.1)$$

Где ρ двумерная комплексная плотность жидкости, величина b действительная безразмерная величина, определяемая значением интеграла. Тело рассматривается в виде сферы с учетом фазы формы тела.

При этом в ламинарном режиме в системе координат $R_\alpha = R_0$, имеем $a_0 = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} R^2 dsdw = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^{*\gamma n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m / z^{*\gamma m} dsdw =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{p-q} \exp(ip\gamma w) / s^{\gamma p} dsdw = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{p-q} \exp(ip\gamma w) s^{\gamma p} dsdw =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{2p+1-q} \exp[i(2p+1)\gamma w] / s^{\gamma(2p+1)} dsdw +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_q a_{2p-q} \exp(2ip\gamma w) / s^{2\gamma p} dsdw$$

Так как $\gamma = (2k+1)/2$ имеем нулевое значение второго интеграла из-за равенства нулю интеграла по углу при $p \neq 0$, член с $p = 0$ равен нулю в силу $a_0 = 0$. Первый интеграл равен

$$h_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{2p+1} a_q a_{2p+1-q} \exp[i(2p+1)\gamma w] / s^{\gamma(2p+1)} dsdw =$$

$$= 2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{2p+1} a_q a_{2p+1-q} \frac{\sin\gamma(2p+1)\pi}{[1-\gamma(2p+1)]\gamma(2p+1)} < 0 .$$

В сумме коэффициентов нужно учитывать, что $a_0 = 0$. В силу действительности коэффициентов имеем действительное значение интеграла по всему пространству, причем имеем $\arg h_0 = \pi$. Причем это действительная постоянная составляющая силы, действующей на тело. Но в пространстве существует след от тела и пограничный слой, которые имеют другое решение, и надо учитывать интеграл по области следа и пограничного слоя, за вычетом интеграла по следу и пограничному слою от решения в виде ряда. Поэтому интеграл от квадрата числа Рейнольдса комплексный.

Форму тела и его размер определим с помощью комплексного радиуса. Причем уравнение радиуса тела зависит от двух углов. Комплексный радиус тела определяется двумя параметрами, размером и фазой. Причем трехмерная задача заменяется плоскостью $\varphi_2^0 = const$, в которой заданы два параметра, радиус s и угол $w = \varphi$. Ставится задача по определению преобразования $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2^0)$ такого, чтобы $\varphi_l = \varphi_l[\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2^0), \varphi_2^0], l = 1,2$, При этом получится кривая линия $\varphi_l = \varphi_l(\varphi, \varphi_2^0), l = 1,2$, причем справедливо $\varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2^0)$.

Имеется взаимно однозначное соответствие между трехмерными и двумерными координатами на плоскости $\varphi_2^0 = const$. При этом на плоскости будут учтены производные по координатам φ_l по формуле $\frac{\partial}{\partial \varphi_l} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_l}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Давление со стороны винта вызывает положительную силу, зависящую от направления скорости тела. Все силы, вычисленные по предлагаемым формулам, являются комплексными силами. Величина a_w отражает размер винта. Величина составляющей давления является действительной и определяется по формуле $F_{const} = \gamma_1 | \rho v^2 R_0^2 / a |$ и является тормозящей силой. Максимум, чего можно добиться, это свести силу давления, являющейся силой сопротивления, к минимуму сопротивления.

Величина $s(w) = 1$ это радиус границы тела, круга. При этом форма тела учтена введением комплексного радиуса тела, где его модуль определяет средний размер тела, а фаза форму тела. При этом плотность двумерная комплексная. Интегрировать надо по всему пространству в силу переменности значения скорости по пространству. При этом дифференциал ds содержит две поверхности, соответствующие радиусам $s, s+ds$, образующую входящий и выходящий поток энергии. Если считать силы по произвольной поверхности, охватывающей тело, то действующие на тело силы будут зависеть от выбора поверхности, так как комплексная скорость R и действительное давление существенно зависит от радиуса в особых зонах и поток энергии не пропорционален $1/s^2$. Отметим, что силы, действующие на тело, определяются однозначно.

При этом для вычисления сил от квадратичной скорости, надо считать интеграл по следу и пограничному слою от разности нового решения и старого решения в особой зоне.

Получается, что для тела, при выполнении условия $\arg a = 0$, подъемная сила квадратичного члена, полученного с использованием особых областей, равна нулю в ламинарном режиме, при отрицательной силе сопротивления.

$$\begin{gathered} F = |\rho V_0^2 ah| \exp(i \arg a + i \arg a / |R_0| + (w_{\max} + w_{\min})/2 + 2i \arg V_0] + \\ + |\rho V_0^2 a h_0| \exp(i \arg a + i \arg a / |R_0| + \arg h_0 + 2i \arg V_0), \arg h_0 = \pi \end{gathered}.$$

Но имеем соотношение $|h_0| < |h|$, и эта сила добавляется к силе тяготения. При этом, так как при выделении множителя $\exp[i(w_{\max} + w_{\min})/2]$ из формулы для описания следа в ламинарном режиме получим симметричное изменение углов следа от $-(w_{\max} - w_{\min})/2$, до угла $(w_{\max} - w_{\min})/2$, значит оставшийся множитель будет действительным, так как коэффициенты ряда действительны. В турбулентном режиме коэффициенты ряда комплексные, и остаточный множитель будет комплексный.

Горизонтальный полет соответствует $\arg V_0 = 0$. Первый член этой формулы соответствует интегралу по следу и пограничному слою, а второй член, соответствует потенциальному описанию потока, интегралу по всему пространству, имеющему малое значение, причем получается соотношение $\arg h_0 = \pi$. Величины $w_{+\max} + w_{+\min} = 2\pi$ для симметричного тела. При этом для симметричного тела $\arg a = 0$, и значит, сила, зависящая от следа, при горизонтальном полете является тормозящей без подъемной силы. Создав асимметрию у тела, появиться отличная от нуля фаза форму тела и отличное от нуля влияние следа.

При этом при определении влияния фазы формы тела на действующие силы нужно учитывать формулу $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2. |a| = \sqrt{|a_+ a_-|}$.

Для симметричного тела фаза формы тела равна нулю для горизонтального движения и коэффициент асимметрии равен нулю. Для плоского тела он равен единице и фаза формы тела равна нулю для горизонтального движения. Он определяется в вертикальной плоскости и равен

$$s = \int_0^l [\frac{z_{\max}(x) + z_{\min}(x)}{z_{\max}(x) - z_{\min}(x)}]^2 \frac{dx}{l}, \qquad (2.2)$$

где $z_{\max}(x)$ верхняя, вертикальная граница тела, $z_{\min}(x)$, нижняя, отрицательная вертикальная граница тела. Отсчет вертикальной координаты введется от уровня $\int_0^l z(x)\frac{dx}{l}$. Тогда в случае симметричного тела фаза формы тела равна нулю, так как верхняя и нижняя граница имеет противоположные знаки.

Рассмотрим, как описывают формулы движение при малых числах Рейнольдса. Комплексное число Рейнольдса тела является единственным определяющим квадратичную силу параметром, так как $\arg h_0 = \pi$ и решение для коэффициентов ряда действительно, так как потенциально, и влияния пограничного слоя и следа мало, первый очень тонкий, а второй удален от тела. Сила сопротивления при потенциальном обтекании определяется тензором присоединенной массы, которая для шара симметрична и боковых сил у сферы нет.

Фаза формы тела при малых числах Рейнольдса определяется по формуле $\arg a(1 + / | R_0 |)$ и соответствует плохо считаемому движению тел, из-за большого значения фазы, которая зависит от малого изменения числа Рейнольдса тела. Это плохо считаемое движение тел при малых числах Рейнольдса описывается с помощью тензора присоединенных масс.

При не симметричной приведенной массе имеется боковая сила. При этом пульсации силы прекращаются у сферы, так ее фаза формы тела равна нулю $\arg a = 0$. Максимальная фаза тела, как показано во втором разделе, равна $\pi / 2$ и при этом квадратичная сила пульсирует, так как фаза квадратичной силы пульсирует и тело движется по плохо считаемой траектории.

$$F = | \rho V_0^2 ah | \exp(i \arg a + i \arg a / | R_0 | + (w_{\max} + w_{\min}) / 2 + 2i \arg V_0)$$

Какова же структура этого интеграла, определяющего квадратичную силу. Во-первых, все члены пропорциональны фактору, учитывающему форму тела, т.е. $\exp[i\arg a + i(w_{\max} + w_{\min})/2]$. Этот коэффициент непосредственно определяет подъемную силу и силу сопротивления, и его увеличение приведет к улучшению характеристик движения. При этом первый интеграл в формуле (2.1) по всему пространству равен нулю. Этот интеграл определяется по области, определяемой следом.

В силу комплексности коэффициентов ряда турбулентного решения, описывающего число Рейнольдса потока, след будет не симметричен даже для симметричного относительно направления движения тела. При этом может возникнуть подъемная сила для не симметричного тела относительно направления движения в турбулентном потоке. В случае ламинарного режима для симметричного тела относительно направления движения след симметричен и для такого тела $\arg a = 0$.

При выходе турбулентной зоны на поверхность тела, возникнет пульсирующая сила, равная по величине

$$F_t = |\rho V_0^2 a\delta| \exp[i\arg a + i(w_{\max} + w_{\min})/2 + i\arg\delta + 2i\arg V_0],$$

в пространстве $(\ln s, w)$ среднее от этой силы определится комплексным коэффициентом δ, который в силу не стационарности границы турбулентной зоны будет пульсирующий с возможной мнимой фазой у этого коэффициента. Эта пульсация сказывается на силах, действующих на движущийся объект.

Рассчитаем силу трения, связанную с кинематической вязкостью. Она равна для комплексной силы

$$F=\rho v^2/a\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial\operatorname{Re}RR_0}{\partial y}-\frac{\partial\operatorname{Im}RR_0}{\partial x}\right)\exp(iw)s(w)dw=$$

$$=i\rho v^2/a\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2\partial RR_0}{\partial z}\exp(iw)dw=i\rho v^2/a\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2\partial RR_0}{\partial\exp(iw)}\exp(iw)dw=$$

$$=\rho v^2/a\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2\partial RR_0}{\partial w}dw=$$

$$=2\rho v^2R_0/a\sum_{k=1}^{\infty}c_k[\exp(i\pi\gamma k)-\exp(-i\pi\gamma k)]=4i\rho vV_0\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin\pi k\gamma=$$

$$=|\rho vdV_0|\exp(-i\pi/2+i\arg V_0),s(w)=1,\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin\pi k\gamma<0$$

Имеем равенства

$$\frac{\partial\operatorname{Re}R}{\partial y}-\frac{\partial\operatorname{Im}R}{\partial x}=\frac{\partial\operatorname{Re}R+i\operatorname{Im}R}{\partial y}-\frac{\partial\operatorname{Re}R+i\operatorname{Im}R}{i\partial x}=i\left(\frac{\partial R}{\partial iy}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)=i\frac{2\partial R}{\partial z}$$

При выводе формулы воспользовались уравнением неразрывности и операторным равенством $\frac{\partial}{\partial iy}+\frac{\partial}{\partial x}=\frac{2\partial}{\partial z},z=x+iy$ см. [2] §6,i)

Переводя эту силу в комплексное представление, получим

$$F=|\rho vV_0d|\exp(-i\pi/2+i\arg V_0).$$

Эта сила увеличивает вес тела. Причем при вертикальном падении $\arg V_0=-\pi/2$ и эта сила является тормозящей. При вертикальном движении, направленном вверх $\arg V_0=\pi/2$ эта сила является подъемной. Но она мала по сравнению с квадратичной силой в силу линейной зависимости от скорости.

Сила линейная по скорости может быть просчитана один раз, и использоваться для произвольного тела. Остается вычислить силу, обусловленную следом и пограничным слоем в ламинарном режиме и турбулентном режим. Причем сила в следе зависит от фазы формы тела. Рассматривается случай, когда турбулентная зона не выходит на границу тела. Если турбулентная область выходит на границу тела, то сила, действующая на тело, резко изменится, и будет пульсировать. Зная изменение скорости, можно определить силы, действующие на тело. Причем при выходе пульсирующего турбулентного режима на границу тела пульсирующим будет и давление, действующее на тело. Давление определяется во всем внешнем пространстве относительно тела. Но если скорость на поверхности тела будет пульсировать, то и давление на поверхности тела будет пульсировать.

Запишем уравнения движения Ньютона для двигающегося в жидкости тела, для чего выпишем силы, действующие на тело

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_1}{dt} = F\cos(\arg V_0) - F_{const}\cos(\arg V_0) + |\rho V_0^2 ah|\cos(\varphi + 2\arg V_0) - \\ -(m-\rho Z)\cos\theta g\sin(\arg V_0) - kN\cos\theta + |\rho\nu V_0 d|\cos(-\pi/2 + \arg V_0) \\ m\dfrac{dV_2}{dt} = F\sin(\arg V_0) - F_{const}\sin(\arg V_0) + |\rho V_0^2 ah|\sin(\varphi + 2\arg V_0) - \\ -(m-\rho Z)\cos\theta g\cos(\arg V_0) + N\cos\theta + |\rho\nu V_0 d|\sin(-\pi/2 + \arg V_0) \end{cases},$$

$$\varphi = \arg a + (w_{\max} + w_{\min})/2$$

где V_1 определяет действительную часть скорости, действующую вдоль горизонтальной оси x, а V_2 действует вдоль вертикальной оси y. Причем нулевая фаза комплексной скорости определяет горизонтальное направление движения без центростремительного ускорения. Справедливо $\arg V_0 = \arg(V_1 + iV_2)\; V_0^2 = V_1^2 + V_2^2$, сила реакции опоры N в полете равна нулю, k коэффициент трения о поверхность земли, при этом $F = \omega|\rho\nu b a_w|\exp(i\arg V_0)$- сила тяги тела. $\rho\, Z$- масса вытесненной несжимаемой жидкости, которая определяет Архимедову силу выталкивания в жидкости, угол θ определяет поверхность, в которой происходит движение. Величина F_{const} это сила сопротивления воздуха за счет действующего давления. При этом влияние величины фазы $i\arg a + i\arg a/|R_0| + i(w_{\max} + w_{\min})/2$ определяющей подъемную силу мало для симметричного тела, и значит, коэффициент при квадратичной силе сопротивления близок к минус единице. Т.е. для увеличения подъемной силы и уменьшения силы сопротивления нужно увеличивать фазу тела $\arg a$. Максимальное значение фазы тела будет вычислено в следующем разделе, причем будет вычислен профиль, определяющий этот размер. Максимальное значение фазы равно $\pi/2$ и соответствует максимальной подъемной силе. Влияние давления на силу сопротивления не устраняется.

Отметим, что в случае движения в вакууме-эфире силы сопротивления уравновешиваются, так как кинематическая вязкость вакуума-эфира $i\hbar/m$. В самом деле, получим

$$\begin{gathered}|\rho V_0^2 ah|\exp(i\arg a + i\arg a/|R_0| + (w_{\max} + w_{\min})/2 + 2i\arg V_0) + \\ + |\rho V_0 d\hbar/m|\exp(i\arg V_0) = 0\end{gathered}.$$

При этом из совпадения фазы у этих двух членов, получим $\arg a = 0$, причем $(w_{\max} + w_{\min})/2 = \pi$ для сферы. Отметим, что такое соотношение между фазами наблюдается у сферы, не обладающей подъемной силой. Кроме того, имеем $\arg V_0 = 0$. Кроме того, необходимо выполнения условий

$$mV_0 = \frac{\hbar}{a}\frac{|d|}{|h|},$$

причем эта величина совпадает с определением длины волны частицы, равной ее «размеру».

$$a = \frac{\hbar}{mV_0}\frac{|d|}{|h|}.$$

3. Вычисление максимального значения фазы тела

Как же определить комплексный радиус тела, чтобы его модуль совпадал с действительным радиусом тела. Для этого определим центр тела. При этом центр тела и системы координат определится из уравнения

$$x_s^0 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x_s(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi), \qquad (3.1)$$

где $x_s(\theta,\varphi)$ координаты границы тела. Так как углы θ,φ зависят от положения начала координат, центр тела определится в этой формуле однозначно из нелинейного уравнения. Задав произвольный центр тела, получим новую координату центра тела.

При этом $r(R_0,\theta,\varphi)=\eta(\theta,\varphi)$. Формулы преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}, \qquad (3.2)$$

$$r=\sqrt{\sum_{l=1}^{3} x_l^2}=r(y,\theta,\varphi)$$

При этом на поверхности тела имеем значение радиуса $r=\eta(\theta,\varphi)$. При фиксированной величине $y\in[a_{\min},a_{\max}]$, имеем некоторую поверхность. Причем поверхность заданного тела переходит в сферическую поверхность, при изменении величины y на отрезке $[a_{\min},a_{\max}]$.

При этом при условии $y>a_{\max}, y<a_{\min}$ получаем, что радиус не зависит от угловых координат.

Итак, имеем задачу по продолжению радиуса на значения удовлетворяющие $y>R_0$, где R_0 определяется по формуле $R_0^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\eta^2(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi)$, где $\eta(\theta,\varphi)$ уравнение поверхности тела.

При этом имеем максимальный радиус тела

$$a_{\max}^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{\max_{\theta,\varphi}\eta^2(\theta,\varphi)+[R_0-\eta(\theta,\varphi)]^2\}\sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi).$$

А минимальный радиус определится из формулы

$$1/a_{\min}^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{\max_{\theta,\varphi}1/\eta^2(\theta,\varphi)+[1/R_0-1/\eta(\theta,\varphi)]^2\}\sin\theta d\theta d\varphi/(4\pi)$$

Определим формулу преобразования внешнего увеличивающегося радиуса

$$1/r(y,\theta,\varphi)=\begin{cases}\delta(y,R_0,a_{\max})/\eta(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,a_{\max})]/a_{\max}, R_0<y<a_{\max}\\ 1/y, y>a_{\max}\end{cases}.$$

Где имеем $\delta(y,R_0,a)=\exp[-\frac{(y-R_0)^2}{(y-a)^2}]/\{\exp[-\frac{(y-R_0)^2}{(y-a)^2}]+\exp[-\frac{(y-a)^2}{(y-R_0)^2}]\}$.

Формула преобразования для внутреннего уменьшающегося радиуса

$$r(y,\theta,\varphi)=\begin{cases}\delta(y,R_0,a_{\min})\eta(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,a_{\min})]a_{\min}, R_0>y>a_{\min}\\ y, y<a_{\min}\end{cases}$$

При этом $r(R_0,\theta,\varphi)=\eta(\theta,\varphi)$.

Построим огибающую внутреннего и внешнего радиуса из двух уравнений

$$r-r(y,\theta,\varphi)=0,\frac{\partial r(y,\theta,\varphi)}{\partial y}=0.$$

Исключив величину y из этих уравнений, получим уравнение огибающей $r=h(\theta,\varphi)$, которое для внешней задачи больше величины $\eta(\theta,\varphi)$, а для внутренней задачи меньше этой величины. Построим радиус, где поверхностью тела является огибающая $r=h(\theta,\varphi)$.

Определим формулу преобразования внешнего радиуса с участием огибающей

$$1/\mathrm{Re}\,w(y,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases}\delta(y,R_0,a_{\max})/h(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,a_{\max})]/a_{\max}, R_0<y<a_{\max}\\ 1/y, y>a_{\max}\end{cases}$$

.

Формула преобразования для внутреннего радиуса с участием огибающей

$$\mathrm{Re}\,w(y,\psi_1,\psi_2)=\begin{cases}\delta(y,R_0,a_{\min})\rho(\theta,\varphi)+[1-\delta(y,R_0,a_{\min})]a_{\min}, R_0>y>a_{\min}\\ y, y<a_{\min}\end{cases}$$

Имеем решаемое уравнение $r=r(R,\theta,\varphi),\frac{\partial r(R,\theta,\varphi)}{\partial R}=0$. Причем второе уравнение выглядит таким образом $\delta'_R(R,R_0,a_{\max})[\frac{1}{h_+(\theta,\varphi)}-\frac{1}{a_{\max}}]=0$. Т.е. уравнение для огибающей $h_+(\theta,\varphi)=a_{\max}$. Совершенно аналогично для внутренней части поверхности имеем $h_{-}(\theta,\varphi)=a_{\min}$.

Определим формулу внешнего радиуса огибающей $\operatorname{Re} w(R,\theta,\varphi)=a_{\max}$.

Формула для внутреннего радиуса огибающей $\operatorname{Re} w(R,\theta,\varphi)=a_{\min}$

Определим мнимую часть радиуса $\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)$ в случае если имеется соотношение $\eta(\theta,\varphi)>r(R,\theta,\varphi)>a_{\min}$ по формуле

$$|\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)|^2=r^2(R,\theta,\varphi)=a_{\min}^2+[\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)]^2 .$$

Причем на границе тела $h_{\min}(\theta,\varphi)=w(R_0,\theta,\varphi)=a_{\min}[1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]$

При этом комплексный радиус имеет значение

$$\begin{aligned}&\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)=a_{\min}+i\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)=\\&=a_{\min}[1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]\end{aligned} . \qquad (3.3)$$

Определим мнимую часть радиуса $\operatorname{Im} w(y,\theta,\varphi)$ по формуле

$$\frac{1}{|\Re(R,\theta,\varphi)|^2}=\frac{1}{r^2(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}^2}+\frac{1}{[\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)]^2} .$$

В случае если имеется соотношение $\eta(\theta,\varphi)<r(R,\theta,\varphi)<a_{\max}$. Причем имеем определение комплексного радиуса тела

$$\frac{1}{\Re(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}}+\frac{i}{\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}}(1+i\sqrt{\frac{a_{\max}^2}{r^2(R,\theta,\varphi)}-1}$$

Причем на границе

$$\begin{aligned}&h_{\max}(\theta,\varphi)=w(R_0,\theta,\varphi)=\frac{a_{\max}}{1+i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}}=\\&=\eta^2(\theta,\varphi)[1-i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}]/a_{\max}\end{aligned}$$

При этом комплексный радиус определится по формуле

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)}=\frac{1}{a_{\max}}[1+\frac{ia_{\max}}{\operatorname{Im} w(R,\theta,\varphi)}]=\\&=\frac{1}{a_{\max}}[1+i\frac{\sqrt{a_{\max}^2-r^2(R,\theta,\varphi)}}{r(R,\theta,\varphi)}]\end{aligned} . \qquad (3.4)$$

Откуда получим $\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)=r^2(R,\theta,\varphi)[1-i\sqrt{a_{\max}^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}]/a_{\max}$.

Причем на границе тела происходит скачок комплексного радиуса. При определении граничных условий во внешности тела и внутренней части тела надо использовать разный комплексный радиус. Общий радиус вводится по формуле

$$\Re(R,\theta,\varphi)=\sqrt{\Re_{\max}(R,\theta,\varphi)\Re_{\min}(R,\theta,\varphi)}=$$
$$=r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\frac{a_{\min}}{a_{\max}}}\sqrt{[1-i\sqrt{a_{\max}^2/r^2(R,\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{r^2(R,\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]}$$

Причем имеем соотношение

$$|\Re(R,\theta,\varphi)|=\begin{cases}a_{\min}, R=a_{\min}\\ a_{\max}, R=a_{\max}\\ \eta(\theta,\varphi), R=R_0\end{cases}$$

Комплексная величина $\Re(R_0,\theta,\varphi)$ отражает уравнение комплексного радиуса тела.

Кроме среднего радиуса тела существует максимальны и минимальный радиуса тела

$$\begin{gathered}\Re_{\max}(R_0,\theta,\varphi)=\eta^2(\theta,\varphi)[1-i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}]/a_{\max}\\ \Re_{\min}(R_0,\theta,\varphi)=a_{\min}[1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]\end{gathered}.$$

При этом определится средний радиус тела

$$\Re^2(R_0,\theta,\varphi)=\eta^2(\theta,\varphi)\frac{a_{\min}}{a_{\max}}[1-i\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1}][1+i\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}]=$$
$$=\exp[i(\arctan\sqrt{\eta^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}-\arctan\sqrt{a_{\max}^2/\eta^2(\theta,\varphi)-1})]\eta^2(\theta,\varphi)$$

При этом средний, максимальный и минимальный комплексный радиус тела равен

$$\begin{gathered}R_{0c}^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re^2(R_0,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi\\ R_{0\max}^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re_{\max}^2(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi \qquad (3.5)\\ R_{0\min}^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re_{\min}^2(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi\end{gathered}$$

Но наряду с этим радиусом, существует комплексно сопряженный радиус тела, так что фаза формы тела определяется не однозначно.

Определятся два радиуса тела

$$\begin{aligned} a_{+} &= \frac{\Re_{0\max} - \Re_{0\min}}{\exp(i\arg\Re_{0\max}) - \exp(i\arg\Re_{0\min})} \times \\ &\times [\exp(i\pi s + i\arg V_0) - \exp(i\arg\Re_{0\min})] + \Re_{0\min} \\ a_{-} &= \frac{\Re^*_{0\max} - \Re^*_{0\min}}{\exp(-i\arg\Re_{0\max}) - \exp(-i\arg\Re_{0\min})} \times \\ &\times [\exp(i\pi s + i\arg V_0) - \exp(-i\arg\Re_{0\min})] + \Re^*_{0\min} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Где величина s, коэффициент асимметрии тела, определенный в формуле (2.2). При этом определится два радиуса тела, полученных из комплексно сопряженных радиусов тела. Причем в случае симметричного тела $s=0$ и $\arg V_0 = 0$, получим нулевое значение фазы радиуса тела $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2 = 0$. И в случае плоского тела при $s=1, \arg V_0 = 0$ выполняется $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2 = 0$.

Подсчитаем максимально возможную фазу формы тела, вычислив среднюю фазу тела, вычислив ее не с помощью коэффициента асимметрии, используя $\arg a = (\arg a_+ + \arg a_-)/2$, где углы имеют единственное значение, а с помощью $\arg a = (\arg a_{\max} + \arg a_{\min})/2$, где углы могут иметь значение плюс и минус.

Приближенно интеграл (3.5) считается по формуле

$$R_{0c} = \frac{Va_{av}}{v}\exp[i(\arctan\sqrt{a_{av}^2/a_{\min}^2 - 1} - \arctan\sqrt{a_{\max}^2/a_{av}^2 - 1})/2]$$

где величина a_{av} это средний размер тела.

Вычислим эту величину для эллипсоида. Радиус, построенный из центра эллипсоида равен

$$\eta(\theta,\varphi) = \frac{a^2+b^2+2c^2}{4} + \frac{a^2-b^2}{4}(\cos 2\theta\cos 2\varphi - \cos 2\varphi) - \frac{a^2+b^2-2c^2}{4}\cos 2\theta$$

При этом $a_{\min} = \sqrt{a^2+b^2}, a_{\max} = c, a_{av} = \sqrt{r^2+2c^2}/2$.

$$\arg R_{0c} = [\arctan\sqrt{c^2/2r^2} - \arctan\sqrt{4c^2/(r^2+2c^2)-1})]/2; r^2 = a^2 + b^2.$$

Максимум этого выражения при условии $c >> r$, т.е. в случае вытянутого эллипсоида, равен $\arg R_{0c} = \dfrac{\pi}{8}, |R_{0c}| = \dfrac{Vc}{\nu\sqrt{2}}$.

В случае тарелки $a = b, 2a^2 > c^2$ имеем $a_{\min}^2 = c^2, a_{\max}^2 = 2a^2 = r^2, a_{av}^2 = (r^2 + 2c^2)/4$, при условии $r >> c$.

$$\arg R_{0c} = (\arctan\sqrt{r^2/4c^2 - 1/2} - \arctan\sqrt{4r^2/(r^2+2c^2)-1})/2 =$$
$$= (\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{3})/2 < \frac{\pi}{8}, |R_{0c}| = \frac{Vr}{\nu 2} = \frac{Va}{\nu\sqrt{2}}.$$

Получается, что тарелка имеет меньшую фазу формы тела и, следовательно, испытывает большее сопротивление.

Большая шероховатость поверхности

$$r = a\sin^2\varphi\sin^2\theta, a_{\min}^2 = a^2, a_{\max}^2 = a^2, a_{av}^2 = a^2/4$$

определяет число Рейнольдса

$$R_{0c} = \exp[i(\arctan\sqrt{a^2/4a^2 - 1} - \arctan\sqrt{4a^2/a^2 - 1})/2] =$$
$$= \frac{Va}{2\nu}\exp(-i\arctan\sqrt{3}/2)\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{V}{2}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\frac{a}{\nu}\exp[-(i\arctan\sqrt{3})/2] =$$
$$= 0.03\frac{Va}{\nu}\exp(-i\pi/6)$$

При значении параметров $r = a\sin^4\varphi\sin^4\theta, a_{\min}^2 = a^2, a_{\max}^2 = a^2, a_{av}^2 = a^2 9/64$, имеем число Рейнольдса

$$R_{0c} = \frac{Va}{4\nu}\exp[i(\arctan i\sqrt{55}/8 - \arctan\sqrt{64/9-1})/2] =$$
$$= \frac{3Va}{8\nu}\exp[-i\arctan\sqrt{55}/3)/2]\frac{8-\sqrt{55}}{8+\sqrt{55}} = 0.01\frac{Va}{\nu}\exp(i\pi/5.29)$$

Наибольшей фазой обладает система, у которой $a_{\min} = 0, a_{\max} = a_{av}$ причем $R_{0c} = \dfrac{Va_{av}}{\nu}\exp(i\pi/4)$. При этом имеем соотношение $a_{\min} < a_{av} < a_{\max}$.

Можно добиться, что $a_{av} = a_{\max}^{1-\alpha}a_{\min}^{\alpha}$, тогда число Рейнольдса потока равно

$$R_{0c}=\frac{Va_{\max}^{1-\alpha}a_{\min}^{\alpha}}{\nu}\exp[i(\arctan\sqrt{a_{\max}^{2-2\alpha}/a_{\min}^{2-2\alpha}-1}-\arctan\sqrt{a_{\max}^{\alpha}/a_{\min}^{\alpha}-1})/2]= \\ =\frac{Va_{\max}^{1-\alpha}a_{\min}^{\alpha}}{\nu}\exp(i\pi/4),\alpha=1/n,n>>1 .$$

Для оптимальной формы тела предлагается следующий профиль

$$r=a_{0av}(a_{\max}/a_{\min})^{(1+\cos\varphi)(1+\sin\theta)/2+(1-\cos\varphi)(1-\sin\theta)/2},r_{\min}=a_{0av},r_{\max}=a_{0av}(a_{\max}/a_{\min})^{0.5},.$$

При этом изменение угла φ,θ на константу не изменит значение интеграла, и значит, фаза формы тела, и модуль радиуса тела не изменятся. Т.е. это характеристики данного тела, его формы и размера. При этом у симметричного тела след может быть расположен под углом.

Тогда имеем значение первого интеграла (3.5)

$$R_{0c}^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{V^2r^2(\theta,\varphi)}{\nu^2}\times \\ \times\exp[i(\arctan\sqrt{r^2(\theta,\varphi)/a_{\min}^2-1}-\arctan\sqrt{a_{\max}^2/r^2(\theta,\varphi)-1})]\sin\theta d\theta d\varphi/4\pi .$$

При условии $a_{\max}>>a_{\min}$ интеграл определяется значением $\theta\sim\pm\pi/2$ с максимумом в точке $\theta=\pm\pi/2$. При этом в точке максимума подынтегрального выражения имеем

$$a_{av}=a_{0av}(\frac{a_{\max}}{a_{\min}})^{(1+\cos\varphi)(1+\sin\theta)/2+(1-\cos\varphi)(1-\sin\theta)/2}=\begin{cases}a_{0av}(\frac{a_{\max}}{a_{\min}})^{1/2},\varphi=0,\theta=\pi/2;,\varphi=\pi,\theta=-\pi/2\\ a_{0av},\varphi=0,\theta=-\pi/2;,\varphi=\pi,\theta=\pi/2\end{cases}.$$

Максимум подынтегральной функции достигается в точке $\varphi=0,\pi$. При этом интеграл равен приближенно (учитываются корни две ветви корней $\theta=\pi/2,\varphi=0$ и $\theta=-\pi/2,\varphi=\pi$)

$$R_{0c}=\frac{Va_{0av}\sqrt{a_{\max}^{1-1/n}/a_{\min}^{1-1/n}}}{2\pi\nu}\exp[i(\arctan\sqrt{a_{\max}^{2-2/n}/a_{\min}^{2-2/n}-1}-\arctan\sqrt{a_{\max}^{2/n}/a_{\min}^{2/n}-1})]= \\ =\frac{Va_{0av}[\sqrt{a_{\max}/a_{\min}}\exp(i\pi/2)-1]}{2\pi\nu},n\sim\frac{a_{\max}}{a_{\min}}>1 .$$

Т.е. вычислено максимальное значение, которое может принимать фаза формы тела, которое равно $\pi/2$.

Результате вычисления с помощью приближенной формулы получено условие максимума фазы тела $a_{\min} = 0$. При этом условии имеем фазу размера тела $\arg a_+ = (-\arg \Re_{0\max} - \arg \Re_{0\min})/2 - \pi s/2 - \arg V_0/2 + \arg \Re_{0\min}/2$. Откуда имеем $-\pi/4 - \arg \Re_{0\max}/4 < \arg a + \arg V_0/4 < \pi/4 - \arg \Re_{0\max}/4$ при условии $\pi s + \arg V_0 + \arg \Re_{0\min} = 2\pi k$. Угол при этом изменяется в пределах $[0, \pi/2]$. Когда размер тела равен нулю и тело образует плоскость и надо переходить к пределу $\frac{\sin[(\pi s + \arg V_0 + \arg \Re_{0\min})/2]}{\sin[(\arg \Re_{0\max} + \arg \Re_{0\min})/2]}$.

Литература

1. *Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г., 736стр
2. *В.С. Владимиров* Уравнения математической физики М.:, «Наука»,1981г, 512с.