

Интервал электромагнитной волны

в анизотропном диэлектрике

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В случае анизотропного диэлектрика при некоторых значениях начальных данных эйконол не определяется, и значит фазовая скорость не имеет фиксированного значения. Преобразование Лоренца при этом не существует. Это дыра в пространстве-времени, причем возможен перескок в другую точку пространства-времени, аналог кротовой норы в ОТО.

Запишем уравнения Максвелла с учетом тензора диэлектрической и магнитной проницаемости

$$(\text{rot}\mathbf{H})_i = \frac{\varepsilon_i^k}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.2, a), \quad \text{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (2.2, b)$$

$$(\text{rot}\mathbf{E})_i = -\frac{\mu_i^k}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial t} \quad (2.2, c), \quad \text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2.2, d)$$

При этом определим потенциалы по формулам

$$\mathbf{E}_i = -(\text{grad}\varphi)_i - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t}, \quad \mathbf{H}_i = \mu_i^{n(-1)} \text{rot}\mathbf{A}_n$$

При этом уравнения (2.2,с), (2.2,д) удовлетворяются автоматически.

Подставим значения потенциалов полей уравнения Максвелла в уравнения (2.2,а),(2.2,б), получим

$$(\text{rot}\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A})_i = -\frac{\varepsilon_i^n}{c} \frac{\partial \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial t} \right]}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_i, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \varepsilon_k^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{\varepsilon_k^i}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_i}{\partial x^k \partial t} = -4\pi\rho$$

Тогда из первого уравнения получим см. [3],§6

$$\frac{1}{4} E_{ipq} \mu_s^{q(-1)} E^{snm} g^{pk} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial x^n} = \mu_i^{pnm} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial x^p \partial x^n} = -\frac{\varepsilon_i^n}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_n}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_i - \frac{\varepsilon_i^n}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t \partial x^n}.$$

Где E^{snm} антисимметричный тензор. Откуда получаем уравнение

$$\mu_s^{km} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^k \partial x^n} + \frac{\varepsilon_s^n}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_n}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s - \frac{\varepsilon_s^n}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^n}$$

Второе уравнение (2.2.1) имеет вид

$$\varepsilon_k^i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\varepsilon_k^i \partial^2 \mathbf{A}_i}{c \partial x^k \partial t} = \varepsilon_k^i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_i}{c \partial x^k \partial t} \right) = -4\pi\rho$$

Используем дополнительное соотношение между потенциалами

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon^{kl} \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial x^k} = 0, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} (\mu_s^{km} - \varepsilon_s^n \varepsilon^{km}) \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^k \partial x^n} + \frac{\varepsilon_s^n}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_n}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s \\ \varepsilon_k^i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} &= \varepsilon_k^i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} = -4\pi\rho \end{aligned}$$

Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} A_p(t, x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^3 \exp\{i\omega[t - \tau(x, y, z)]\} g_{p\beta} \times \\ &\times \{A_{k\beta}(x, y, z)(i\omega \tau_0)^k \lambda(\omega \tau_0) + B_{k\beta}(x, y, z)/(i\omega \tau_0)^{k+\gamma} [1 - \lambda(\omega \tau_0)]\} \\ \varphi(t, x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^3 \exp\{i\omega[t - \tau(x, y, z)]\} g_{0\beta} \times \quad . \quad (2.2.2) \\ &\times \{C_{k\beta}(x, y, z)(i\omega \tau_0)^k \lambda(\omega \tau_0) + D_{k\beta}(x, y, z)/(i\omega \tau_0)^{k+\gamma} [1 - \lambda(\omega \tau_0)]\} \\ \lambda(\omega \tau_0) &= \frac{\exp(-\omega^2 \tau_0^2)}{\exp(-\omega^2 \tau_0^2) + \exp[-1/(\omega^2 \tau_0^2)]} \end{aligned}$$

Отметим, что в случае волновода решение ищется в виде

$$\begin{aligned} A_p(t, x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^3 \exp\{i\omega[t - \tau(r, \varphi)] + i\omega h z\} g_{p\beta} \times \\ &\times \{A_{k\beta}(r, \varphi, z)(i\omega \tau_0)^k \lambda(\omega \tau_0) + B_{k\beta}(r, \varphi, z)/(i\omega \tau_0)^{k+\gamma} [1 - \lambda(\omega \tau_0)]\} \end{aligned}$$

И решение в волноводе не определяется решением уравнения эйконала, а является направленным в одном направлении и, следовательно, фазовая скорость, определенная в волноводе не является решением уравнения эйконала и не может служить скоростью в преобразовании Лоренца. В этом случае фазовая скорость равна

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{c_d^2}$$

Получаем уравнение относительно собственных векторов

$$\begin{aligned} [(\varepsilon_s^n \varepsilon^{km} - \mu_s^{km}) \frac{\partial \tau}{\partial x^k} \frac{\partial \tau}{\partial x^n} - \frac{\varepsilon_s^m}{c_d^2}] g_{m\beta} &= 0 \\ [\varepsilon^{pi} \frac{\partial \tau}{\partial x^p} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c_d^2}] g_{0\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Эта система линейных уравнений приводит к определению собственных чисел и собственных векторов из уравнений

$$\begin{aligned} (B_s^m - \lambda_\beta \delta_s^m) g_{m\beta} &= 0 \\ |B_s^m - \lambda_\beta \delta_s^m| &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы это уравнение имело не нулевое решение, определитель 4 порядка этого уравнения должен равняться нулю. Причем имеется 4 варианта равенства нулю этого определителя. Т.е. имеется 4 уравнения по определению фазовой скорости

$$H\left(\frac{\partial \tau}{\partial x^1}, \frac{\partial \tau}{\partial x^2}, \frac{\partial \tau}{\partial x^3}, \varepsilon_s^m, \mu_s^i\right) = H(p_1, p_2, p_3, \varepsilon_s^m, \mu_s^i) = c_d^2.$$

Решая это дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка методом характеристик, получим функцию $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$. Так как гамильтониан зависит только от импульса, эти координаты являются циклическими и задача решается в квадратурах. Уравнение характеристик будет

$$\frac{dx_l}{dt} = \frac{\partial H(p_1, \dots, p_3)}{\partial p_l} \quad \frac{dp_l}{dt} = 0, l = 1, \dots, 3 \quad (2.2.3)$$

$$\frac{d\tau_\beta}{dt} = \sum_{l=1}^3 p_l \frac{\partial H}{\partial p_l}.$$

Решение этой задачи можно проинтегрировать, и оно имеет вид

$$p_l = p_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), l = 1, \dots, 3$$

$$x_l = x_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) + \frac{\partial H[p_1^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, p_3^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)]}{\partial p_l} (t - t_0)$$

$$\tau = \tau^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) + \sum_{l=1}^3 p_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \frac{\partial H[p_1^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, p_3^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)]}{\partial p_l} (t - t_0)$$

Для существования и единственности задачи Коши, должны выполняться начальные условия

$$x_l = x_l^0(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), l = 1, \dots, 3$$

$$\tau = \tau(t_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)$$

Гиперповерхность, заданная этим уравнением гладкая, т.е. ранг матрицы

$$\frac{\partial x_l^0}{\partial \alpha_k^0}, \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_k^0}, \frac{\partial x_l^0}{\partial t^0}, \frac{\partial \tau}{\partial t^0} \text{ равен 3.}$$

Задача Коши ставится для уравнения (2.2.3) такая,

что

$$\tau[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)] = \tau_0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \tau[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)] = p_l^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \quad (2.2.4)$$

Причем h_0, p_l^0 заданные гладкие функции, $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$. Для данных Коши должны выполняться два условия согласования

$$H[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, q_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), p_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, p_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)] = 0$$

$$d\tau_0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) = \sum_{l=1}^N p_l^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) dx_l^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)$$

Кроме того, необходимо, чтобы определитель не равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} & \frac{\partial H}{\partial p_3} & \sum_{l=1}^3 p_l \frac{\partial H}{\partial p_l} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \tau(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \tau(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial x_2^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial \tau(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)}{\partial \alpha_3} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.2.5)$$

Где производные функции H взяты в точке $[x_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, x_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), p_1^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \dots, p_3^0(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)]$. При выполнении этих условий, задача Коши для уравнения (2.2.3) с начальными условиями

(2.2.4) имеет решение в окрестности точки $\alpha_l^0, l = 1, \dots, 3$, причем единственное.

Т.е. определится связь $x_l = x_l(t, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \tau = \tau(t, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0); l = 1, \dots, 3$, а если определитель (2.2.5) отличен от нуля, то определяется и обратная функция $t = t(x_1, x_2, x_3), \alpha_l^0 = \alpha_l^0(t, x_1, x_2, x_3)$, а с нею и зависимость $\tau = \tau(t, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) = \tau(t, x_1, x_2, x_3)$.

Если определитель в формуле (2.2.5), равен нулю, и имеем связь между приращениями с равным нулю определителем

$$\Delta x_l = \frac{\partial x_l}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_1^0} \Delta \alpha_1^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_2^0} \Delta \alpha_2^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_3^0} \Delta \alpha_3^0, \quad \text{где частные производные}$$

вычислены для каждого приращения с помощью теоремы о среднем значении. Т.е. приращение параметров $\Delta t, \Delta \alpha_l^0, l = 1, 2, 3$, при определенных значениях Δx_l зависит от произвольной константы, т.е. решение параметр τ в данной точке имеет много значений, т.е. фазовая скорость имеет континуум значений в данной точке. Существует теорема линейной алгебры, если определитель линейной системы уравнений имеет ранг $N - 1$, т.е. равен нулю, то при определенных значениях правой части системы линейных уравнений решение этой системы зависит в частности от одной произвольной константы. Значит преобразование Лоренца в данной точке определено с точностью до произвольной функции, и возможен перескок в другую координату. Для перескока тела конечных размеров определитель должен быть равен нулю не в одной точке, а в области, причем координата перескока определяется по правилу Лопиталя. Происходит деление нулевого определителя на нулевой определитель, и надо подобрать определитель в числителе, чтобы получилась определенная координата. Для перескока в области необходимо добиться равенства ранга определителя (2.2.5) единице при конечном интервале времени t и области пространства x^1, x^2, x^3 внутри анизотропного диэлектрика. Но при этом перескакивающее тело должно двигаться с большой скоростью, иначе будет справедливо преобразование Галилея, которое от фазовой скорости света не зависит.

Интервал при этом равен

$$ds^2 = c_d^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Но как добиться анизотропных свойств в газообразной среде, анизотропия - это свойство твердого тела. Для этого диэлектрик надо привести в движение, и тогда его свойства будут анизотропными. Но скорость движения должна быть близка к фазовой скорости света.

Имеется еще одна проблема. Достаточно ли свойств анизотропности свойств конечного объема для перескока в другую точку пространства, или необходимо, чтобы все пространство было анизотропным.

Определится время t и координаты поверхности $x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t)$ и так как определитель этой системы нелинейных уравнений, определится счетное количество точек комплексных $\alpha_k^0(t), k = 1, \dots, 3$ для нулевого значения определителя, т.е. до скачка. Причем система линейных уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta x_l &= \frac{\partial x_l}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_1^0} \Delta \alpha_1^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_2^0} \Delta \alpha_2^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_3^0} \Delta \alpha_3^0 \\ \Delta \tau &= \frac{\partial \tau}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1^0} \Delta \alpha_1^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2^0} \Delta \alpha_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_3^0} \Delta \alpha_3^0 \end{aligned}$$

Где определитель равняется нулю. Найдем частное решение этого уравнения и запишем систему уравнений относительно приращения к частному решению

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_l}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_1^0} \Delta \alpha_1^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_2^0} \Delta \alpha_2^0 + \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_3^0} \Delta \alpha_3^0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1^0} \Delta \alpha_1^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2^0} \Delta \alpha_2^0 + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_3^0} \Delta \alpha_3^0 &= 0 \end{aligned}$$

Тогда в новых переменных надо приравнять определитель этой системы уравнений нулю и определять решение с точностью до множителя. Этот множитель определим из равенства нулю определителя этой системы нелинейных уравнений. Получится 4 решения. Но управлять этим выбором невозможно. Решение нелинейного уравнения равноправно определяет

корень. Не понятно с какой скоростью будет двигаться замкнутый объем и как ускорение отразится на организмы перемещающихся объектов. В силу отсутствия преобразования Лоренца отсутствуют и свойства пространства-времени, и скачок произойдет мгновенно и без влияния ускорения на организмы.