Связь решения уравнения ОТО со скоростью среды, т.е. с решением уравнения Навье-Стокса

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Проблема получения решения для нескольких тел до сих пор не решена в ОТО. Она осложняется тем, что функция Лагранжа в 4 порядке малости для нескольких тел зависит от величины метрического тензора g_{ok}, что приводит к сложному виду контравариантного тензора и связанным с этим сложными вычислениями. Задача упрощается, если ввести зависимость от одной переменной, равной интервалу. Тогда получим уравнение не в частных производных, а систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получения зависимость от скорости многих тел.

Рассмотрим задачу вычисления контравариантного метрического тензора в случае не диагонального метрического тензора. Для этого подсчитаем определитель метрического тензора

$$|g_{lk}| = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & 0 & 0 \\ g_{20} & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = -g_{30}g_{11}g_{33}g_{03} + g_{33}(g_{00}g_{11}g_{22} - g_{10}g_{01}g_{22} - g_{20}g_{02}g_{11}) = .$$

$$= g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}(1 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2), u_l^2 = -\frac{g_{l0}^2}{g_{ll}g_{00}} > 0$$

Вычислим диагональные контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{00}g_{00} = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{u_0^2}; u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$
$$u_0^2 = 1 + u^2; u_0^2 - u^2 = 1$$
$$g^{11}g_{11} = \frac{1+u_2^2+u_3^2}{1+u^2} = 1 - \frac{u_1^2}{1+u^2} = 1 - \beta_1^2$$
$$g^{22}g_{22} = \frac{1+u_1^2+u_3^2}{1+u^2} = 1 - \frac{u_2^2}{1+u^2} = 1 - \beta_2^2 \quad .$$
$$g^{33}g_{33} = \frac{1+u_1^2+u_2^2}{1+u^2} = 1 - \frac{u_3^2}{1+u^2} = 1 - \beta_3^2$$
$$\beta_l = \frac{u_l}{\sqrt{1+u^2}}; u_l = \frac{\beta_l}{\sqrt{1-\beta^2}}; \beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$$

Компоненты $u_0^2 - u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1$ образуют четырехмерные скорости пространства Минковского и является определением величины u_0^2.

При этом величина $g^{11}g_{11} + g^{22}g_{22} + g^{33}g_{33} = 2 + g^{00}g_{00}$.

Вычислим пространственно-временные компоненты контравариантного метрического тензора

$$g^{10}g_{10} = -\frac{u_1^2}{1+u^2} = -\beta_1^2$$
$$g^{20}g_{20} = \frac{u_2^2}{1+u^2} = \beta_2^2$$
$$g^{30}g_{30} = -\frac{u_3^2}{1+u^2} = -\beta_3^2$$

Причем справедливо $g_{l0} = \sqrt{-g_{ll}g_{00}}u_l$. Вычислим пространственные не диагональные компоненты контравариантного метрического тензора

$$g^{21}\sqrt{g_{11}g_{22}} = -\frac{u_1u_2}{1+u^2} = -\sqrt{\beta_1\beta_2}$$
$$g^{31}\sqrt{g_{11}g_{33}} = -\frac{u_3u_1}{1+u^2} = -\sqrt{\beta_1\beta_3}$$
$$g^{32}\sqrt{g_{22}g_{33}} = -\frac{u_3u_2}{1+u^2} = -\sqrt{\beta_2\beta_3}$$

При этом производная от величины интервала равна

$$\frac{\partial s}{\partial x^p_\beta}=\frac{\partial\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha}dx^i_\alpha dx^k_\alpha}}{\partial x^p_\beta}=\frac{g_{ik\beta}(\delta^i_p dx^k_\beta+\delta^k_p dx^i_\beta)+\frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x^p_\beta}dx^i_\alpha dx^k_\alpha}{2\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} g_{ik\alpha}dx^i_\alpha dx^k_\alpha}}=$$

$$=g_{pk\beta}\frac{dx^k_\beta}{ds}+\frac{\partial g_{ik\alpha}}{\partial x^p_\beta}\frac{dx^k_\alpha}{ds}dx^i_\alpha=g_{pk\beta}\frac{dx^k_\beta}{ds}.$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^p_\beta\partial x^q_\gamma}=\frac{\partial g_{pk\beta}}{\partial x^q_\gamma}\frac{dx^k_\beta}{ds}+\frac{\partial g_{qk\gamma}}{\partial x^p_\beta}\frac{dx^k_\gamma}{ds}=\frac{dg_{pk\beta}}{ds}\frac{\partial s}{\partial x^q_\gamma}\frac{dx^k_\beta}{ds}+\frac{dg_{qk\gamma}}{ds}\frac{\partial s}{\partial x^p_\beta}\frac{dx^k_\gamma}{ds}$$

Воспользуемся условием выбора произвольной системы отсчета и положим 4 условия $g_{00}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, g_{21}=g_{12}=0, g_{31}=g_{13}=0, g_{32}=g_{23}=0$. Но каково уравнение ОТО в случае зависимости метрического тензора от $4N$ координат. Для этого надо записать тензор кривизны, зависящий от одного вида метрического тензора, но являющимся функцией 4N переменных

$$R_{ik\gamma}=\sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ik\gamma}}{\partial x^l_\beta}-\frac{\partial\Gamma^l_{il\gamma}}{\partial x^k_\beta}\right)+\Gamma^l_{ik\gamma}\Gamma^m_{lm\gamma}-\Gamma^m_{il\gamma}\Gamma^l_{km\gamma}$$

Решаем задачу для гравитационного поля в пустоте, имеется 6N независимых уравнений ОТО и шесть неизвестных $g_{\alpha\alpha}, \beta_\alpha, \alpha=1,...,3$, зависящих от $4N$ координат. Причем для каждого тела имеется свое уравнение ОТО с метрическим тензором $g_{ik\gamma}, \gamma=1,...,N$. Причем начальные условия на бесконечности

$$g_{\alpha\alpha\gamma}=-1-\frac{r_g}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\gamma|}n^2_{\alpha\gamma}, \frac{dg_{\alpha\alpha\gamma}}{ds}=\frac{r_g}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\gamma|^2}\frac{dr}{ds}n^2_{\alpha\gamma}-\frac{2r_g}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\gamma|}n_{\alpha\gamma}\frac{dn_{\alpha\gamma}}{ds}; n_{\alpha\gamma}=\frac{r_\alpha}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\gamma|}; r_g=\frac{2Gm}{c^2},$$

$$\beta_{\alpha\gamma}=0, \frac{d\beta_{\alpha\gamma}}{ds}=0; \alpha=1,...,3; \gamma=1,...,N$$

см. [2]. Для определения координат используем уравнение $\frac{dx^\alpha_\gamma}{ds}=u^\alpha_\gamma=\frac{\beta^\alpha_\gamma}{\sqrt{1-\beta^2_\gamma}}, \alpha=0,...,3; \gamma=1,...,N$. Получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую получим $g_{\alpha\alpha\gamma}(s), \beta_{\alpha\gamma}(s), \alpha=1,...,3, x^k_\gamma(s), k=0,...,3; \gamma=1,...,N$, которая окажется комплексной.

Тогда имеем $\sum_{\gamma=1}^{N} g_{ik\gamma}(s)u_{\gamma}^{i}u_{\gamma}^{k}=1; s=s(u_1^0,....,u_1^3,...,u_N^0,....,u_N^3), u_{0\gamma}^2=1+u_{\gamma}^2$.

Таким образом можно описать метрический тензор для каждого из N тел, получится метрический тензор каждого тела $g_{ik\gamma}=g_{ik\gamma}(u_1^0,....,u_1^3,...,u_N^0,....,u_N^3), \gamma=1,...,N; i,k=0,...,3$. Имеем зависимость $x_{\gamma}^{k}=x_{\gamma}^{k}(s)=\int_{s_0}^{s}u_{\gamma}^{k}(s)ds+x_{\gamma}^{k}(s_0), \gamma=1,...,N; k=0,...,3$. Метрический тензор определяется 3N независимыми компонентами скорости, причем эти 3N независимые скорости определяют координаты. Получается, что можно определить метрический тензор, при определенных значениях координат, т.е. задание метрического тензора с помощью параметров.

Зная импульс системы относительно каждого тела, можно найти скорость относительно центра масс системы

$$U_{\alpha}=\frac{\sum_{\gamma=1}^{N}m_{\gamma}u_{\alpha\gamma}}{\sum_{\gamma=1}^{N}m_{\gamma}}=\frac{dx_{\alpha}}{ds}-\frac{\sum_{\gamma=1}^{N}m_{\gamma}\frac{dx_{\alpha\gamma}}{ds}}{\sum_{\gamma=1}^{N}m_{\gamma}}.$$

И, следовательно, получить решение для уравнения Навье-Стокса.

Из решения уравнения ОТО определяется скорость среды, т.е. определяется решение уравнения Навье-Стокса. Но из решения уравнения Навье-Стокса не следует решение ОТО, так как оно содержит не определенную часть диагонального пространственного метрического тензора.

Литература

1. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля т. II, Наука, М.,1973,564с.