Квантовые коэффициенты диффузии и теплопроводности

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Проводится идеология о мнимой кинематической вязкости вакуума. Тогда решения уравнения Навье-Стокса в разреженном газе эквивалентно уравнению Шредингера с мнимой кинематической вязкостью. В силу аналогии диффузия и теплопроводность описываются уравнениями для непрерывной среды. Коэффициент теплопроводности тоже становится мнимым, и температура газа колеблется в пространстве и во времени. Поэтому вводить температуру как характеристику разреженного газа нельзя, она колеблется в пространстве и во времени у разреженного газа.

Квантовая кинематическая вязкость вакуума равна $i\hbar/(2m)$. Изменится и квантовые коэффициент диффузии и теплопроводности, содержащие кинематическую вязкость. Коэффициент теплопроводности χ и вязкости η газов связаны коэффициентом $\chi/\eta = Ac_V, \chi = Ai\rho\hbar c_V/m_e; A \sim 1 \div 2.5$, где m_e масса электрона. Формула для квантовой теплопроводности и диффузии начинает работать, когда длина свободного пробега меньше характерного размера системы.

Расход при течении в трубе у сжимаемого разреженного газа определяется по формуле

$$Q = A\frac{a^3}{l\sqrt{\mu}}\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right). \qquad (1)$$

См. формулу (96.2) из [1]. Формула (1) зависит от шероховатости поверхности, что не отражено в ее виде. Кроме того, формула (1) это линейное приближение относительно параметра $\frac{a}{l}$.

В случае несжимаемой жидкости при одинаковой температуре трубы имеется формула (17.10) из [2]. Для мнимой кинематической вязкости она получена из уравнения Шредингера, эквивалентного уравнению Навье-Стокса

$$Q = \frac{\pi \Delta p a^4}{8 \nu l}. \qquad (2)$$

В случае мнимой кинематической вязкости для вычисления вклада мнимой части в действительную часть, мнимую часть формулы необходимо привести к безразмерному виду, извлечь корень из оставшейся части и умножить на коэффициент, зависящий от шероховатости поверхности.

$$Q = \frac{\pi \Delta p a^2 l}{8 \nu}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \to \frac{\pi \Delta p a^2 l}{8|\nu|}\frac{a}{l}\beta(\tan\alpha) = \frac{\pi \Delta p a^3}{8|\nu|}\beta(\tan\alpha); \nu = i\hbar/(2m_e). \qquad (3)$$

Где величина $\tan\alpha$ модуль среднего тангенса наклона шероховатости. Но какова формула для промежуточного случая, не полностью разреженного газа. Кинематическая вязкость не полностью разреженного газа равна $\nu = i\hbar/(2m_e) + \rho_l \nu / \rho_b$, где используется плотность разреженного газа и плотность двигающегося тела (или плотность границы среды) ρ_l, ρ_b. Тогда формула выглядит таким образом

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi \Delta p a^4}{8l[i\hbar/(2m_e) + \rho_l \nu/\rho_b]} = \frac{\pi \Delta p a^4[\rho_l \nu/\rho_b - i\hbar/(2m_e)]}{8l[\hbar^2/(2m_e)^2 + (\rho_l \nu/\rho_b)^2]} \to \\ &\to \frac{\pi \Delta p a^4 \rho_l \nu/\rho_b}{8l[\hbar^2/(2m_e)^2 + (\rho_l \nu/\rho_b)^2]} + \frac{\pi \Delta p a^3 \hbar/(2m_e)}{8[\hbar^2/(2m_e)^2 + (\rho_l \nu/\rho_b)^2]}\beta(\tan\alpha) \end{aligned}. \qquad (4)$$

При плотности среды, равной нулю, она переходит в формулу (3). Формула справедлива при постоянной плотности среды. Но в случае учета изменения концентрации, концентрация среды колеблется в пространстве и во времени. В случае начальной постоянной концентрации среды концентрация среды не меняется. В случае переменной в пространстве концентрации среды в начальный момент времени, концентрация растворенного в среда вещества колеблется, тем длительнее чем меньше плотность вакуума. Колебание концентрации растворенного вещества в жидкости, вызывает изменение плотности по закону $\rho_l = \rho_l^0[1+\alpha c(t)]$.

Формула (1) появилась из формулы Пуазейля (2) при замене длины свободного пробега в значении коэффициента кинематической вязкости на характерный размер – радиус трубопровода $\nu = \frac{1}{3}\lambda < V >= \frac{1}{3}a\sqrt{8kT/\pi\mu}$ см. [3]. Получается формула (1) с точностью до коэффициента см. [3]

$$Q = \frac{3\pi a^3\sqrt{\pi\mu}}{8l}\frac{\Delta p}{\sqrt{8kT}}. \tag{5}$$

Правильный коэффициент соответствует формуле

$$Q = \frac{8\pi a^3\sqrt{\mu}}{3l}\frac{\Delta p}{\sqrt{2\pi kT}}. \tag{5a}$$

Формулы (3) и (5а) противоречат друг другу и совпадают при условии $\hbar/[2m_e\beta(\tan\alpha)] = \frac{3l\sqrt{2kT/\pi\mu}}{64}; \beta(\tan\alpha) = \frac{64\hbar\sqrt{\pi\mu}}{lm_e 3\sqrt{2kT}} = \frac{1}{14.6l}, \mu = Am_P; [l] = m$ и одинаковой температуре в трубе, содержащей воздух. Это равенство при некоторой степени шероховатости реализуется. Причем влияние отношения модуля средней высоты шероховатости к радиусу трубопровода зависит от модуля среднего тангенса наклона шероховатости и внешнего давления см. [4].

Почему формула (1) не верная. Дело в том, что при разных температурах газа при мнимой теплопроводности устанавливается колебательный режим температуры газа с комплексной температурой и свести его к однородной температуре невозможно. Величина $p/\sqrt{T}$ в разреженном газе подчиняется уравнению Шредингера или Навье-Стокса с кинематической вязкостью $\nu = i\hbar/(2m_e)$ и, значит, уравнение теплопроводности имеет мнимую кинематическую вязкость и режим температуры – постоянное значение плюс колебательная добавка во времени и в пространстве. Параметр $p/\sqrt{T_0}$, который получается из-за разницы температур в начале и конце трубопровода и является переменным во времени и в пространстве с одинаковой постоянной частью см. формулу (6). При этом колеблющаяся температура имеет разные переменные значения в начале и конце трубопровода. Уравнение Навье-Стокса и уравнение Шредингера описывает разреженный газ, значит и уравнение для температуры и концентрации описывает разреженный газ.

Коэффициент диффузии равен кинематической вязкости $D = \nu = \eta/\rho = i\hbar/(2m_e)$ и для разреженного газа является мнимым. Согласно формуле Эйнштейна он равен $D = kTB$, где величина B определяется подвижностью газов.

Решение для температуры в случае мнимой теплопроводности (длина свободного пробега велика) имеет вид

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp[-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}] d\tau$$

При изменении температуры $T = T_0(t)$ в сечении $x = 0$. $T = 0, t \to -\infty, x > 0$ Для потока тепла $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ через граничную поверхность

$$q(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Температура и поток тепла в случае мнимой кинематической вязкости получились комплексные, что означает колебание с амплитудой, равной мнимой части. Отметим, что в книге [2] изменение температуры тоже комплексное. Но имеется отличие, если в книге [2], подразумевается действительная часть температуры, то в данном случае температура является комплексной, где мнимая часть подразумевает среднеквадратичное отклонение температуры.

При начальной температуре $T_0(\mathbf{r}) = T_0 + \sum_n c_n[T_n(\mathbf{r}) - T_0]; \chi\Delta T_n = \frac{\partial T_n}{\partial t} = -\lambda_n(T_n - T_0)$ получаем изменение температуры во времени

$$T(\mathbf{r}) = T_0 + \sum_n c_n[T_n(\mathbf{r}) - T_0]\exp(-\lambda_n t) \tag{6}$$

где величина λ_n мнимая. Температура разреженного газа является колебательной. Степень разрежения определяет затухание колебательной части температуры. При конечной длине свободного пробега имеется затухание, которое определяется величиной $a^3/\lambda^3 \sim \rho_l/\rho_b$, отношением характерного размера задачи к длине свободного пробега. При бесконечной длине свободного пробега затухания нет и коэффициент кинематической вязкости считается по другой формуле. При плотности вакуума, равной нулю, затухания нет.

Уравнения диффузии связаны с уравнением для температуры

$$\begin{gathered} \frac{\partial c}{\partial t} = D(\Delta c + \frac{k_T}{T}\Delta T) \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p}(\frac{\partial \mu}{\partial c})\frac{\partial c}{\partial t} = \chi\Delta T \end{gathered}.$$

При мнимой кинематической вязкости, коэффициент диффузии и теплопроводности мнимые. Это приводит к колебанию концентрации и температуры, имеющих комплексное значение. Уравнение диффузии без учета изменения температуры имеет вид

$$c(\mathbf{r},t) = \frac{M}{8\rho(\pi Dt)^{3/2}}\exp(-r^2/4Dt)$$

В начале процесса жидкость массы М была расположена в начале координат. Остается в силе формула $c(\mathbf{r},t) = \sum_n \alpha_n c_n(\mathbf{r})\exp(-\lambda_n t); c_0(\mathbf{r}) = \sum_n \alpha_n c_n(\mathbf{r})$ с комплексными колебаниями концентрации жидкости.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит. 2005, 544с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика, т.VI, М.-, «Наука», 1988г.,
3. Кикоин А.К.. Кикоин И.К., Молекулярная физика. М.: Наука, 1976, 480 стр.
4. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2016, 61 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1509211918.pdf