Условие перехода к турбулентному режиму нелинейных уравнений в частных производных

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Условием перехода к турбулентному хаотическому режиму является наличие кратных координат положения равновесия. При этом кратные координаты положения равновесия должны являться решением квадратного уравнения. По мере изменения параметра, дискриминант этого квадратного уравнения из положительного значения переходит в отрицательное, образуя кратный корень, который переходит в комплексный турбулентный режим. Это режим является хаотическим, так как мнимая часть описывает среднеквадратичное отклонение, а действительная часть среднее значение. Но аттрактор Лоренца не удовлетворяет этому условию, его двойные корни являются константами, поэтому комплексный турбулентный режим не образуется, а просто имеется хаотическое решение, не переходящее в комплексный турбулентный режим.

При условии, что содержится кратный корень x_N, не являющийся константой, а являющийся решением квадратного уравнения, например $(x_N - a_N^s)(x_N - a_N^p)$, являющийся одинаковым решением s и p ветви решения алгебраического уравнения, эквивалентное N уравнение для переменной x_N имеет вид

$$\frac{dx_N}{dt} = (x_N - a_N^s)(x_N - a_N^p)P_N(x_1,...,x_N) = F_N(x_1,...,x_N), a_N^s = a_N^p.$$

Но возможна ситуация с кратным корнем, имеющая вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_N}{dt} &= (x_N - a_N^s)P_N(x_1,...,x_N) \\ \frac{dx_k}{dt} &= (x_N - a_N^s)P_k(x_1,...,x_N) \end{aligned}.$$

Тогда определитель линеаризованной системы не равен нулю, но имеется кратное положение равновесия. В этом случае возможно хаотическое решение, не переходящее в комплексное, турбулентное.

При этом формула учитывает несколько ветвей координат положения равновесия. Значит, частная производная в положении равновесия имеет вид

$$\frac{\partial F_N}{\partial x_k} = (x_N - a_N^s) Q_k(x_1, \ldots, x_N).$$

При этом эквивалентный определитель системы дифференциальных уравнений равен нулю. Но формула для линеаризованной системы уравнений учитывает одну ветвь координат положения равновесия, упуская нулевое значение для определителя $|\frac{\partial F_l}{\partial x_k}| = 0$ в случае кратных положений равновесия при приближении x_N к значениям a_N^s или a_N^p. При линеаризации системы нелинейных уравнений учитывается либо a_N^s, либо a_N^p, а надо учитывать обе одновременно, поэтому в случае если кратные корни константа, определитель линеаризованной системы не равен нулю, а в случае квадратного уравнения равен нулю.

При двукратном положении равновесия определитель линеаризованной системы не обязательно равен нулю, например, аттрактор Лоренца, имеет двукратные положения равновесия, но его определитель линеаризованной системы не равен нулю см. [1]. Приведем пример существования хаотического решения при кратных корнях. Это аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}.$$

Эта система имеет положения равновесия

$$\begin{cases} x=0, y=0, z=0 \\ x=\sqrt{b(r-1)}, y=\sqrt{b(r-1)}, z=r-1 \\ x=-\sqrt{b(r-1)}, y=-\sqrt{b(r-1)}, z=r-1 \end{cases}.$$

При этом корень $z=r-1$ двукратный, являющийся константе. Причем определитель линеаризованной системы этих уравнений не вырожденный. Но корень этого уравнения является константой. Эта задача в хаотическом режиме вращается вокруг одного из положений равновесия. Потом решение системы нелинейных уравнений резко перескакивает к другому положению равновесия и вращается вокруг второго положения равновесия. Это связано с тем, что хотя положения равновесия кратные, определитель линеаризованной системы уравнений у аттрактора Лоренца не равен нулю. Но у системы линеаризованных уравнений, построенных с помощью двукратного корня по мере приближения к точке, соответствующей $x=\sqrt{b(r-1)}, y=\sqrt{b(r-1)}, z=r-1$, образует скачок от этого положения равновесия. При этом происходит произвольный перескок на решение с положением равновесия $x=-\sqrt{b(r-1)}, y=-\sqrt{b(r-1)}, z=r-1$.

Причем возможно колебание между кратными положениями равновесия, так как не кратное положение равновесия не устойчиво.

В книге [1], описан сценарий рождения аттрактора Лоренца через неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. В этой книге считается, что условием хаотического решения является наличие в системе Лоренца седло - узла и двух седло – фокусов, откуда вытекает возможность существования в ней различных гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций. Терминологию и объяснение обозначений см. [1].

В предлагаемой статье определен простой критерий существования хаотического решения. Наличие хаотических решений связано с наличием кратного положения равновесия системы уравнений.

Теорема 1. Пусть $a_k, k=1,...,N$ координаты одного из положений равновесия системы нелинейных, дифференциальных, автономных уравнений. В случае двукратного значения положения равновесия a_N, линейное приближение решения дифференциального уравнения с устойчивым положением равновесия $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, k=1,...,N-1$, определяет сходимость к положению равновесия при условии $|g_{NN}^{-1} g_{NN}| < 1$, где матрица g_{lk}, это собственные векторы матрицы линеаризованной системы. В случае противоположного условия $|g_{NN}^{-1} g_{NN}| > 1$ положение равновесия не достижимо и получается многозначное решение. Предполагается, что выполняется $N > 2$.

Доказательство.

В силу существования двукратного корня, равного a_N уравнение можно привести к виду (1) с вырожденной матрицей линеаризованной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_s}{\partial x_k}|_{x_p=a_p} (x_k - a_k) + \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{N} \frac{\partial^2 F_s}{\partial x_l \partial x_p}|_{x_p=a_p} (x_l - a_l)(x_k - a_k) + ... \quad (1)$$

Т.е. определитель матрицы $\frac{\partial F_l}{\partial x_k}|_{x_p=a_p}$ равен нулю в этом представлении.

Решаем линеаризованное уравнение (2)

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_l}{\partial x_k}|_{x_p=a_p} (x_k - a_k), l=1,...,N \quad (2)$$

Это уравнение имеет решение в окрестности положения равновесия $x_l = a_l + \sum_{k=1}^{N-1} g_{lk} \exp[\lambda_k (t - t_1)] c_k + g_{lN} c_N$, так как $\lambda_N = 0$, где собственные векторы g_{lk} и собственные числа λ_k определятся из системы уравнений

$$| \frac{\partial F_l}{\partial x_k} |_{x_p = a_p} - \lambda_\alpha \delta_{lk} | = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\frac{\partial F_l}{\partial x_k} |_{x_p = a_p} - \lambda_\alpha \delta_{lk}) g_{k\alpha} = 0$$

Причем наблюдается приближение x_l к значению $x_l = a_l + g_{lN} c_N$. Т.е. положение равновесия не обязательно достижимо в случае кратных корней, даже для системы с $\operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = 1, \ldots, N-1$, так как выполняется условие $\lambda_N = 0$. Найдем условие сходимости к кратному корню. Имеем соотношение $c_N^t = \sum_{l=1}^{N} g_{Nl}^{-1} \exp(\lambda_l t) g_{lN} c_N = \sum_{l=1}^{N-1} g_{Nl}^{-1} \exp(-k_l) g_{lN} c_N + \exp[k_N \ln(g_{NN}^{-1} g_{NN})] c_N$. При этом для определения константы c_N при дискретном вычислении решения имеем следующее рекуррентное соотношение $c_N^{k+1} = g_{NN}^{-1} g_{NN} c_N^k$ при достижении устойчивыми координатами положения равновесия. Т.е условием сходимости решения в направлении g_{lN} является неравенство $| g_{NN}^{-1} g_{NN} | < 1$. При условии $| g_{NN}^{-1} g_{NN} | > 1$ наблюдается отсутствие сходимости в одном направлении g_{lN}, остальные c_l не растут. Скачок решения осуществляется мгновенно на произвольное значение величины c_N, по формуле $c_N^t = \exp\{t[\ln(| \sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN} |) + i \arg(\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}) + 2\pi i s] / h\} c_N^0$, в момент времени, когда по устойчивым направлениям достигнуто положение равновесия. При этом решение увеличится в разы

$$\exp\{k[\ln(| \sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN} |) + i \arg(\sum_{l=1}^{N} g_{NN}^{-1} g_{NN}) + 2\pi i s]\} \qquad (3)$$

Но в силу приближенности решения, получится не бесконечность, а переход к другому положению равновесия. Точное решение при численном счете получается мгновенно при условии $h \to 0$ и имеет значение, зависящее от малости величины h. Т.е. происходит произвольный скачок. Остальные возможно комплексные направления $g_{lk}, k = 1,..., N-1$ собственного вектора, соответствуют устойчивому собственному числу положения равновесия.

Причем в случае численной схемы получится в случае рационального значения k в формуле (3) конечное число состояний, а в общем случае при иррациональном значении k получится счетное число состояний. Численный счет в случае k целого определит единственное решение, так как период мнимой части фазы умножается на целое число.

Если же наблюдается одно положительное собственное число при остальных отрицательных, то имеем $x_l = \sum_{k=1}^{N} g_{lk} \exp(\lambda_k t) c_k$ и рано или поздно растущий член будет иметь большее значение, и будет удаление от положения равновесия.

Получается, что в случае одного нулевого собственного числа и остальных отрицательных собственных числах, наблюдается приближение к положению равновесия вдоль комплексных собственных векторов с отрицательными действительными частями собственных чисел. При определенных условиях имеется удаление решения от положений равновесия по комплексному направлению собственных векторов с нулевым собственным числом.

Конец доказательства.

Коэффициент ряда решения уравнения Навье-Стокса $\mathbf{R} = \sum_n \mathbf{R}_n \varphi_n(\mathbf{r})$ равен

$$R_n = R_{cr} \beta_n - \sqrt{R_{cr}^2 \beta_n^2 - T\alpha_n} .$$

Коэффициент β_n увеличивается, коэффициент α_n убывает с ростом индекса. Ряд сходится, так как с ростом индекса этот коэффициент стремится

$R_n = \frac{T\alpha_n}{R_{cr}\beta_n} \sim \frac{1}{n^2}$. Где по мере роста внешнего безразмерного давления T, образуется кратный корень, равный критическому числу Рейнольдса, причем $\beta_1 = 1$ и внешнее давление удовлетворяет условию $R_{cr}^2 = T\alpha_1$. Это общее свойство перехода к турбулентному решению нелинейных дифференциальных систем уравнений в частных производных, наличие кратного корня и переход к комплексному решению.

Так в случае уравнения Шредингера аналогом критического числа Рейнольдса в задаче о атоме является бесконечное главное квантовое число. При этом безразмерные параметры становятся комплексными $n = -\frac{i}{\sqrt{2E}}; \rho = ikr, k = \sqrt{2E}$ см. [1]. Турбулентный режим соответствует связанному состоянию с счетным количеством уровней энергии при одинаковой потенциальной энергии, а ламинарный свободному состоянию с одним значением энергии при заданной потенциальной энергии. Связанное состояние имеет мнимое значение импульса $p_k = -i\hbar \frac{\partial \ln R_{nl}(r)}{\partial x^k}$ причем волновая функция действительная, а импульс имеет мнимое значение, описывая турбулентный режим. Формула для величины $R_{nl}(r) = \frac{\Gamma(l)}{2\pi i}\int\limits_C \exp(t)(t-r)^{-n} t^{n=l} dt$. При условии $n \to \infty$ зависимость интеграла от радиуса ликвидируется и волновая функция равна константе, т.е. импульс равен нулю. Критическое значение импульса нулевое, т.е. действительная часть критического импульса равна нулю, как и критическое значение энергии $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = 0$. Импульс имеет счетное количество разных значений, так же как и энергия. Причем они соответствуют одному значению потенциальной энергии.

У нелинейного уравнения ОТО аналогом критического числа Рейнольдса является горизонт событий. При радиусе r, проведенном из центра тела, меньше гравитационного r_g наблюдается комплексное время $d\tau = \sqrt{1 - r_g / r}dt$ и комплексный радиус $d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1 - r_g / r}}$. Происходит переход к комплексному турбулентному режиму, описываемому вероятностным образом, с наличием среднего и дисперсии времени и координат. Решение для радиуса имеет вид

$$\rho = r_g + i\frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{r_g - r}} \cong r_g - i\sqrt{r_g(r_g - r)}, r < r_g .$$

Т.е. имеет вид общий с решением гидродинамической задачи $R = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T\alpha}$ как и решение задачи квантовой механики. В обоих случаях наблюдается двойной корень в критической точке.

Нужно доказать, что за горизонтом событий имеется счетное значение энергий как у турбулентного решения или связанного состояния при одном распределении масс, а вне горизонта событий одно значение энергии, соответствующее одному распределению масс. Это следует из общего описания решения нелинейных уравнений в частных производных.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория. Т. III, М.: Наука, 1989г., 768стр.