# Вычисление фазовой скорости звуковых волн одиночного тела и среды

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Вычисление фазовой скорости материальных тел и среды сложная задача. Следует различать постоянную фазовую скорость среды, полученную из решения нелинейного уравнения и являющейся константой для данной среды, и переменную фазовую скорость тел, для вычисления которой надо задать скорость двигающегося тела. Фазовая скорость среды распространяется на все пространство, а фазовая скорость тела на область, прилегающую к телу. Ситуация аналогична фазовой скорости электромагнитных волн для среды и для тела см. [1], [2].

Имеется единственная система координат, в которой скорость для внешней задачи $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \mathbf{a}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \varphi_n(r,\theta,\varphi)$ на бесконечности равна 0, эту систему координат назовем абсолютной. Причем необходимо, чтобы интеграл имел $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_m \varphi_n(r,\theta,\varphi)\varphi_m(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ конечное значение, что означает конечное значение энергии. Имеются и другие задачи с единственным значением скорости центра инерции, например, описывающие нашу Солнечную систему см. [3]. К таким задачам принцип суперпозиции не применим, но в выделенной системе координат можно описать волну, удовлетворяющую преобразованию Лоренца. Для этого надо построить решение в не штрихованной системе координат, на бесконечности имеющей нулевую скорость, как решение нелинейного уравнения, и сделать преобразование $x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, y = y', z = z'$. Тогда уравнение будет инвариантно относительно преобразования Лоренца, но в выделенной системе координат. При этом параметр, который определяется зависит от не штрихованных координат, и зависит от штрихованных как волна. Причем если имеется зависимость от всех не штрихованных координат, то штрихованные определяются однозначно. В атмосфере Земли скорость на бесконечности равна нулю, иначе получается бесконечная энергия системы т.е. решать задачу надо относительно $\mathbf{U}$, определяя величину $\mathbf{a}_0$. Космический вакуум тоже является разреженным газом см. [4] и в нем скорость на бесконечности всей Вселенной равна нулю, иначе энергия системы была бы бесконечная. Отмечу, что согласно последним данным наша Вселенная является плоской и понятие бесконечности радиуса существует, он не замыкается. Но даже в не плоской Вселенной за бесконечность надо принять половину максимальной длины дуги замкнутой траектории. Причем радиус поверхности, образующий замкнутую траекторию стремится к бесконечности.

При этом необходимо пересчитывать преобразование Лоренца в систему отсчета неподвижного тела в абсолютной системе координат. Члены $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \varphi_n(r,\theta,\varphi)$ описывают возмущение среды, абсолютная скорость тела $\mathbf{a}_0$, получена в результате вычислений и надо перейти к абсолютной системе отсчета, где среда на бесконечности имеет нулевую скорость и тело неподвижно. Системы отсчета, двигающиеся относительно абсолютной, показывают значение координат и времени, которое надо пересчитывать в абсолютную систему отсчета по формулам Лоренца. Если формулы в двигающейся системе отсчета, относительно абсолютной являются зависимыми, то и преобразование Лоренца описывает зависимые величины.

В общем по предложенной схеме можно применять преобразование Лоренца всегда, но могут получиться зависимые величины, как в штрихованных, так и не штрихованных координатах.

Вычислим величину фазовой скорости материальных тел. Запишем уравнения гидродинамики

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho V_l}{\partial x_l}=0 \\ \rho(\frac{\partial V_l}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_l}{\partial x_k})=-\frac{\partial p(\rho)}{\partial x^l}\end{gathered}. \qquad (1)$$

Докажем, что уравнение Эйлера не инвариантно относительно преобразований Галилея. Для чего подставим значение скорости в штрихованной и не штрихованной системе координат при неизменном давлении $p=p'$, получим два уравнения

$$\begin{gathered}\rho(\frac{\partial V_l}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_l}{\partial x_k})=-\frac{\partial p(\rho)}{\partial x^l} \\ \rho(\frac{\partial (V_l'+u_l)}{\partial t}+(V_k'+u_k)\frac{\partial (V_l'+u_l)}{\partial x_k})=-\frac{\partial p(\rho)}{\partial x^l}\end{gathered}. \qquad (2)$$

Должно получится уравнение для штрихованной системы координат

$$\rho(\frac{\partial V_l'}{\partial t}+V_k'\frac{\partial V_l'}{\partial x_k})=-\frac{\partial p'(\rho')}{\partial x^l} \qquad (3)$$

Вычтем из второго уравнения (2), учитывая, что $u_k=const$, уравнение (3), получим

$$u_k\frac{\partial V_l'}{\partial x_k}=-\frac{\partial p(\rho)}{\partial x^l}+\frac{\partial p'(\rho')}{\partial x^l}=0.$$

Штрихованные и не штрихованные давление и плотность совпадают в случае преобразования Галилея. Выбираем систему координат, где скорость системы координат имеет одну компоненту. Тогда она должна равняться нулю. Получается, что две системы отсчета совпадают, так как их относительная скорость $u_k$ равна нулю.

Пусть среда однородна $\rho(\mathbf{r},t)=\rho_0$ и в ней движется с постоянной скоростью тело $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)=\mathbf{V}_0$. (Нетрудно видеть, что такая пара $\rho,\mathbf{V}$ является решением уравнений). Рассмотрим малые возмущения этого состояния в окрестности тела, то есть положим

$$\rho(\mathbf{r},t)=\rho_0+\rho_1(\mathbf{r},t)$$
$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t)=\mathbf{V}_0+\mathbf{V}_1(\mathbf{r},t)$$

подставим в уравнения и сохраним в них только линейные по малым добавкам $\rho_1(\mathbf{r},t),\mathbf{V}_1(\mathbf{r},t)$ члены. Если использовать движение среды со скоростью $\mathbf{V}_0$, то энергия системы бесконечная. При малых добавках к скорости справедлива формула сложения скоростей Галилея в линейном приближении для преобразования Лоренца. Получим

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+V_{0k}\frac{\partial\rho_1}{\partial x_k}+\rho_0\frac{\partial V_{1l}}{\partial x_l}=0$$
$$\rho_0\left(\frac{\partial V_{1l}}{\partial t}+V_{0k}\frac{\partial V_{1l}}{\partial x_k}\right)=-c^2\frac{\partial\rho_1}{\partial x^l}$$

где $c^2=\dfrac{\partial p}{\partial\rho}$- квадрат скорости звука. Например, для идеального газа, подставляя уравнение адиабаты, получаем $c^2=\gamma\dfrac{p}{\rho}$.

До "волнового уравнения" остается один шаг: нужно продифференцировать одно из уравнений - первое или второе - с помощью оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}+V_{0k}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и воспользоваться оставшимся. Например, подействуем оператором $\dfrac{\partial}{\partial t}+V_{0k}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ на первое уравнение и подставляя $\dfrac{\partial V_{1l}}{\partial t}+V_{0k}\dfrac{\partial V_{1l}}{\partial x_k}$ из второго, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_{0k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\rho_1=c^2\Delta\rho_1$$

подействуем оператором $\frac{\partial}{\partial t} + V_{0k}\frac{\partial}{\partial x_k}$ на второе уравнение и подставляя $\frac{\partial \rho_{1l}}{\partial t} + V_{0k}\frac{\partial \rho_{1l}}{\partial x_k}$ из первого, получим

$$(\frac{\partial}{\partial t} + V_{0k}\frac{\partial}{\partial x_k})^2 V_{1l} = c^2 \Delta V_{1l}$$

Так как коэффициенты этого уравнения являются константы, то проводя оператор, имеющий вид квадратичной форм

$$(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{V_{0k}}{c}\frac{\partial}{\partial x_k})^2 - \Delta$$

к диагональному виду, получим волновое уравнение относительно вектора.

Стоит задача приведения квадратичной формы

$$y_0^2 + \frac{2V_l}{c} y_l y_0 + \frac{V_l V_k}{c^2} y_l y_k - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = a_{lk} y_l y_k .$$

К диагональному виду. Где $y_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, y_l = \frac{\partial}{\partial x_l}$. Полагаем $y_l = g_{l\alpha} z_\alpha$. Для этого необходимо найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования $a_{lk}$

$$| a_{lk} - \lambda_\alpha \delta_{lk} | = 0$$
$$(a_{lk} - \lambda_\alpha \delta_{lk}) g_{k\alpha} = 0 .$$

Тогда квадратичная форма приводится к виду ( $z_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ )

$$a_{lk} y_l y_k = \lambda_\alpha (\sum_{l=0}^{3} g_{\alpha l}^{-1} g_{l\alpha}) z_\alpha^2 = \lambda_\alpha z_\alpha^2 .$$

Тогда волновое уравнение приводится к виду

$$\lambda_\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial z_\alpha^2} = 0 .$$

Вводя новые переменные по формуле

$$\xi_m = \frac{z_m \sqrt{-\sum_{k=0}^{3} \lambda_k / 2}}{\sqrt{-\lambda_m}}, m = 1,2,3.$$

Тогда волновое уравнение переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial \tau^2} = c_s^2 \frac{\lambda_{0l0}}{\sum_{l=0}^{3} -\lambda_k / 2} \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial \xi_m^2}; d\tau = dz_0 / c_s$$

Так как три собственных числа этого преобразования отрицательны, а одно положительно, временная координата связана с положительным собственным числом, а пространственные координаты с отрицательным, при этом все растянутые координаты действительные.

Вычислим собственные числа этого преобразования

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & V_{01}/c & V_{02}/c & V_{03}/c \\ V_{01}/c & -1-\lambda & V_{01}V_{02}/c^2 & V_{03}V_{01}/c^2 \\ V_{02}/c & V_{01}V_{02}/c^2 & -1-\lambda & V_{03}V_{02}/c^2 \\ V_{03}/c & V_{01}V_{03}/c^2 & V_{02}V_{03}/c^2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Вычислим значение этого определителя, разложив по первой строке до второго порядка малости

$$-(1-\lambda)(1+\lambda)^3 - (V_{01}^2 + V_{02}^2 + V_{03}^2)(1+\lambda)^2 / c^2 = 0.$$

Получим два приближенных уравнения

$$\begin{gathered} \lambda^2 - 1 - (V_{01}^2 + V_{02}^2 + V_{03}^2) / c^2 = 0 \\ (1+\lambda)^2 = 0 \end{gathered}.$$

Откуда имеем приближенные собственные числа $\lambda_{0,1} = \pm\sqrt{1+(V_{01}^2+V_{02}^2+V_{03}^2)/c^2}$; $\lambda_{3,4} = -1$. Собственные векторы этой матрицы равны $g_{k\alpha} = \delta_{k\alpha}$. Откуда имеем значение фазовой скорости

$$c_F^2 = c_s^2 \frac{\lambda_0}{\sum_{k=0}^{3} -\lambda_k / 2} = c_s^2 \lambda_0 = c_s^2 + u^2; u^2 = (V_{01}^2 + V_{02}^2 + V_{03}^2)/2 \qquad (4)$$

Отметим, что вычислена переменная фазовая скорость двигающегося тела, скорость среды является константой. Фазовая скорость среды определяется из решения нелинейного уравнения в собственной или абсолютной системе отсчета и является постоянным слагаемым решения. Она определяется для ламинарного режима не однозначно и зависит от внешнего давления. так в случае круглого трубопровода для внутренней задачи, она равна $R = \frac{\delta c_F}{\nu} = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8}$ (решение задачи гидродинамики для трубопровода с круглым сечением см. [5]), при числе Рейнольдса потока $R = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})(1 - r^2/a^2)$, где используется критическое число Рейнольдса и безразмерное давление. Фазовая скорость потока для внутренней задачи определяется при нулевом радиусе. Для внешней задачи получаем решение $R = (R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T/8})(1 - a^2/\rho^2)$ и при интегрировании по пространству квадрата числа Рейнольдса постоянный член надо исключить.

Характерный размер при вычислении фазовой скорости, совпадает с шириной фронта ударной или звуковой волны и максимальная действительная часть фазовой скорости равна $c_F = \frac{\nu R_{cr}}{\delta\sqrt{2}} = c_s/\sqrt{2} = \sqrt{(\frac{\partial p}{\partial \rho})_s}/\sqrt{2}$. Такое определение числа Рейнольдса нужно для нахождения фазовой скорости тела. Если определять число Рейнольдса потока, то за характерный размер надо использовать размер радиуса трубопровода. Далее квадратный корень является мнимым, и фазовая скорость не растет, действительная часть является постоянной и фазовая скорость константа в турбулентном режиме. В ламинарном режиме фазовая скорость константа тоже, с ростом давления увеличивается величина параметра $\delta$. Фазовая скорость звуковых волн при разном перепаде давления равна $T = \frac{16 c_s \delta R_{cr}}{\nu\sqrt{2}}; R = \frac{T}{16 R_{cr}} = c_s \frac{\delta}{\nu\sqrt{2}}, c_F = \frac{\nu R}{\delta} = c_s / \sqrt{2}$ фазовой скорости для неподвижной среды $c_F = c_s$.

## Выводы

Фазовая скорость звуковой волны всего пространства - это константа, определяемая свойствами среды, и в любой инерциальной системе отсчета одинакова. По мере приближения к двигающемуся телу, вступает в действие фазовая скорость тела, фазовая скорость растет и достигает максимума на поверхности тела. Это связано с тем, что источником звуковых волн является колебание тела и на поверхности тела фазовая скорость максимальная. Так как формула для линейной части в начале комплексного решения противоречива, реализуется линейный режим до критической точки. Причем между линейным режимом и началом нелинейного происходит скачок. Так как возможен переход к скорости, большей скорости звука, фазовая скорость звука скачком изменяется и в дальнейшем возможны две фазовые скорости, до фронта ударной волны и после фронта. Это описание справедливо, если за характерный размер взять ширину фронта звуковой волны, если использовать в качестве характерного размера диаметр трубопровода, то ситуация изменится, скорость при которой образуется турбулентный режим изменится. Такая двойственность связана с несовершенством формул гидродинамики, безразмерные параметры допускают подобие. В совершенной теории по безразмерным параметрам можно определить размерные.

Ситуация отличается от фазовой скорости электромагнитной волны в диэлектрике. Фазовая скорость тела в диэлектрике зависит от скорости тела и направления распространения электромагнитной волны и постепенно переходит в константу по мере удаления от тела. По мере приближения к телу она может как увеличиваться, так и уменьшаться. Фазовая скорость на удалении от тела является константой, определяется свойствами среды, и в любых инерциальных системах отсчета одинакова. Фазовая скорость в диэлектрике отличается от фазовой скорости в вакууме. Также как в вакууме существует константа скорости распространения в диэлектрике, одинаковая в разных инерциальных системах отсчета. Но в диэлектрике по мере приближения к телу, фазовая скорость изменяется. В вакууме она жесткая константа. и только внутри тела, диэлектрика изменяется.

$$c_d = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\exp(-|\frac{(1/\sqrt{\varepsilon\mu}-V/c)ka^2(\varepsilon\mu-1)}{R}|^2)+$$
$$+\frac{c(1-V^2\varepsilon\mu/c^2)}{\sqrt{\varepsilon\mu+(\varepsilon\mu-1)^2\frac{(\mathbf{V},\mathbf{n})^2}{c^2}(1-V^2\varepsilon\mu/c^2)}-\frac{(\varepsilon\mu-1)(\mathbf{n},\mathbf{V})}{c}}\times$$
$$\times[1-\exp(-|\frac{(1/\sqrt{\varepsilon\mu}-V/c)ka^2(\varepsilon\mu-1)}{R}|^2)]$$

Максимальная скорость движения тела в диэлектрике определится из равенства $c_d = V = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. В случае $\varepsilon\mu = 1$ получаем максимум скорости, вычисленный по этой формуле, определяемый при условии $V = c$.

Где величина $R$ определяет радиус среды, $a$ размер диэлектрического тела с постоянными свойствами, возможен радиус среды, равный размеру тела $R = a$, $\mathbf{n}$ направление распространения электромагнитной волны, $\mathbf{V}$ скорость тела или среды, $\varepsilon,\mu$ диэлектрическая и магнитная проницаемость тела, величина $k$ модуль волнового вектора электромагнитной волны.

Получим аппроксимирующую формулу для звуковых волн с учетом ударной волны

$$c_d = [c_{s1}\delta_{n1} + c_{s2}\delta_{n2}]\exp(-\frac{ka^2}{R}) + c_s\sqrt{1+V^2/2c^2}[1-\exp(-\frac{ka^2}{R})], n = 1,2$$

$$c_{sl} = \begin{cases} \frac{\nu}{\delta}[R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T\alpha}] \cong \frac{\nu T\alpha}{2\delta R_{cr}} = c_s/\sqrt{2}, T = \frac{2\delta c_s R_{cr}}{\alpha\nu\sqrt{2}}, R_{cr}^2 > T\alpha \\ \frac{\nu_{cr}}{\delta_{cr}} R_{cr}/\sqrt{2} = c_s/\sqrt{2}, R_{cr}^2 = T\alpha \\ \frac{\nu_{sl}}{\nu_{cr}} c_s, R_{cr}^2 < T\alpha; \end{cases} ; c_s = \sqrt{(\frac{\partial p}{\partial \rho})_s}.$$

В критической точке происходит скачок производной числа Рейнольдса от внешнего давления, но эта функция непрерывная. Справедливо одно общее значение фазовой скорости в точке разрыва производной $c_{s1} = \frac{\nu_{s1}}{\delta_{cr}} R_{cr} = \frac{\nu_{cr}}{\delta_{cr}} R_{cr}/\sqrt{2} = c_s/\sqrt{2}$ и $c_{s2} = \frac{\nu_{s2}}{\delta_{cr}} R_{cr} = \frac{\nu_{cr}}{\delta_{cr}} R_{cr}/\sqrt{2} = c_s/\sqrt{2}$ согласно линейному приближению ламинарного режима, фазовая скорость на границе с турбулентным режимом рвется, увеличиваясь в $\sqrt{2}$ раз, вернее увеличивается в $\sqrt{2}$ раз кинематическая вязкость, и при скорости больше скорости звука образуется две фазовые скорости с разной кинематической вязкостью, причем $c_{s1}c_{s2} = \frac{\nu_{cr}^2}{\delta_{cr}^2} R_{cr}^2 = c_s^2; \nu_{s1}\nu_{s2} = \nu_{cr}^2$.

При этом наступление турбулентного режим наблюдается при одинаковом числе Рейнольдса. Но так как характерный размер меняется для звуковых волн, относительно характерного размера задачи, что соответствует разным задачам гидродинамики, то фазовая скорость звуковых волн среды, отличается от фазовой скорости тела, в ламинарном режиме фазовая скорость звуковых волн тела больше чем фазовая скорость среды примерно в $\sqrt{2}$ раз и является переменной.

## Литература


1. Якубовский Е.Г. Постоянство модуля фазовой скорости среды в разных инерциальных системах отсчета. «Энциклопедический фонд России», 2018, 5стр. http://russika.ru/userfiles/390_1549653728.pdf

2. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца. «Энциклопедический фонд России», 2018, 131 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1548089744.pdf
3. Якубовский Е.Г. Определение орбит планет с учетом размера и скорости вращения планет. «Энциклопедический фонд России», 2019, 10 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1549200817.pdf
4. *Якубовский Е.Г.* ЧАСТИЦЫ ВАКУУМА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ПОЛЯ Реферативный журнал «Научное обозрение» 2016, т.2, стр.58-80, http://science-review.ru/abstract/pdf/2016/2/662.pdf
5. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2018, 66 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1538004822.pdf