# Алгоритм решения задачи гидродинамики при произвольной геометрии потока и внешнем воздействии дельта функции

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение уравнения Навье-Стокса для произвольной области потока - это сложная задача. Удалось получить это решение сначала в линейном приближении. Задается источник жидкости в виде дельта функции, расположенный в произвольной точке области. По этой информации решена задача в линейном приближении. Вводятся коэффициенты нелинейного приближения, подставляется в уравнение и интегрируется по пространству. Получается ламинарное действительное решение и турбулентное комплексное. Решается система 6 уравнений с 6 неизвестными. Разработан численный метод решение этой системы нелинейных уравнений при большом перепаде давления и получены конечные формулы при большом давлении. При малом перепаде давления получается ламинарное решение линейной задачи. В промежуточном случае сформулированы уравнения и задача сведена к итерационной схеме решения.

Уравнение Навье – Стокса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} V_k \frac{\partial V_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x^i} + \nu \Delta V_i . \qquad (1)$$

Для этого решаем трехмерную ламинарную стационарную задачу без учета конвективного члена при заданном внешнем воздействии $g_l$

$$\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} = \nu \Delta V_i .$$

Приведем эту задачу к безразмерному виду, разделив на величину $\nu^2 / d^3$, получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = \Delta R_i ,$$

$$R_s = V_s d / v, T = \frac{Pd^2}{\rho v^2}, y_s = x_s / d$$

Линейная часть стационарного решения уравнения Навье-Стокса описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 R_p}{\partial y_k^2} = \frac{\partial T}{\partial y_p}$$

Это уравнение имеет решение

$$R_p = -ie_p \exp(ik_l y_l) =; T = \exp(ik_l y_l)$$

$$\sum_{l=1}^{3} k_l^2 e_p = k_p ; \sum_{l=1}^{3} k_l^2 = 1, e_p = k_p$$

$$R_p = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -ik_p(\psi_1,\psi_2) g(\psi_1,\psi_2) \exp[ik_l(\psi_1,\psi_2) y_l] h(\psi_1,\psi_2) d\psi_1, d\psi_2 \quad (2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} k_p(\psi_1,\psi_2) g(\psi_1,\psi_2) \sin[k_l(\psi_1,\psi_2) y_l] h(\psi_1,\psi_2) d\psi_1, d\psi_2$$

$$h(\psi_1,\psi_2) = \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}, g_{ik} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial x_n}{\partial \psi_l} \frac{\partial x_n}{\partial \psi_k}$$

$$T = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi_1,\psi_2) \exp[ik_l(\psi_1,\psi_2) y_l] h(\psi_1,\psi_2) d\psi_1, d\psi_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi_1,\psi_2) \cos[k_l(\psi_1,\psi_2) y_l] h(\psi_1,\psi_2) d\psi_1, d\psi_2 = T\delta(y_1 - y_1^\alpha)\delta(y_2 - y_2^\alpha)\delta(y_3 - y_3^\alpha) -$$

$$-T\delta(y_1 - y_1^\beta)\delta(y_2 - y_2^\beta)\delta(y_3 - y_3^\beta)$$

Где имеем определение углов

$$e_p = \begin{cases} \sin\psi_1 / \sqrt{\cos^2\psi_1 (1 + \tan^2\psi_1 + \tan^2\psi_2)} \\ \sin\psi_2 / \sqrt{\cos^2\psi_2 (1 + \tan^2\psi_1 + \tan^2\psi_2)} \\ \cos\psi_1 / \sqrt{\cos^2\psi_1 (1 + \tan^2\psi_1 + \tan^2\psi_2)} \end{cases}; y_l = R \begin{cases} \sin\psi_1^0 / \sqrt{\cos^2\psi_1^0 (1 + \tan^2\psi_1^0 + \tan^2\psi_2^0)} \\ \sin\psi_2^0 / \sqrt{\cos^2\psi_2^0 (1 + \tan^2\psi_1^0 + \tan^2\psi_2^0)} \\ \cos\psi_1^0 / \sqrt{\cos^2\psi_1^0 (1 + \tan^2\psi_1^0 + \tan^2\psi_2^0)} \end{cases}$$

Уравнение неразрывности сводится к уравнению по определению давления и

$$\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial R_p}{\partial y_p}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{p=1}^{3}k_p^2 g(\psi_1,\psi_2)\exp[ik_l(\psi_1,\psi_2)y_l]h(\psi_1,\psi_2)d\psi_1,d\psi_2=$$
$$=T\delta(y_1-y_1^{\alpha})\delta(y_2-y_2^{\alpha})\delta(y_3-y_3^{\alpha})-T\delta(y_1-y_1^{\beta})\delta(y_2-y_2^{\beta})\delta(y_3-y_3^{\beta})$$

Уравнение неразрывности сводится к точечному источнику и в случае источника и стока приводит к неизменному объему жидкости. При интегрировании произведения числа Рейнольдса на источник и сток, получается отличное от нуля значение, так как координаты источника и стока разные.

При этом сумма давлений, действующих в разных направлениях, во всем пространстве равна нулю в случае компенсирующего источника и стока

$$\int_V\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\psi_1,\psi_2)\exp[ik_l(\psi_1,\psi_2)y_l]h(\psi_1,\psi_2)d\psi_1,d\psi_2 d^3y_l=0$$

Определяем направления ортов этой поверхности $k_p(\psi_1,\psi_2)$ и величину $g(\psi_1,\psi_2)$ из трех уравнений $R_p[y_1,y_2,y_3(y_1,y_2)]=0$, где величина $y_3=y_3(y_1,y_2)$ уравнение поверхности тела. Величины ортов связаны условием $\sum_{p=1}^{3}k_p^2=1$.

Имеем три уравнения с тремя неизвестными.

Так как уравнение нелинейное, оно имеет вид

$$A_l[y_1,y_2,y_3,\varphi_1(\psi_1,\psi_2),\varphi_2(\psi_1,\psi_2),\varphi_3(\psi_1,\psi_2)]\varphi_l(\psi_1,\psi_2)=0. \qquad (3)$$

Из этой системы трех уравнений с тремя неизвестными можно определить

$$\begin{gathered}y_l=y_l[\varphi_1(\psi_1,\psi_2),\varphi_2(\psi_1,\psi_2),\varphi_3(\psi_1,\psi_2)],l=1{,}2\\ y_3(y_1,y_2)=y_3[\varphi_1(\psi_1,\psi_2),\varphi_2(\psi_1,\psi_2),\varphi_3(\psi_1,\psi_2)]\end{gathered}.$$

И следовательно из системы трех уравнений с тремя неизвестными определить $\varphi_l(\psi_1,\psi_2)=g_l(y_1,y_2)$. Так как на поверхности тела имеется две независимые переменные, то связь между углами и координатами полученная из любой пары уравнений будет удовлетворять третьему уравнению, так как независимых переменных две.

Решение ищем в виде $\Re_l = \alpha_l(\tau) R_l(y_1, y_2, y_3)$

Приведем уравнение Навье – Стокса к безразмерному виду, разделив его на величину $2v^2 / d^3$, получим безразмерное уравнение

$$\frac{\partial \Re_l}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{3} \Re_k \frac{\partial \Re_l}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_l} + \Delta \Re_l$$

$$\Re_l = \frac{V_l d}{v}, y_l = x_l / d, \tau = tv / d^2, p = \frac{Pd^2}{\rho v^2}, h_l = g_l \frac{d^2}{v^2} = \frac{\partial p}{\partial y_l}.$$

Получим уравнение

$$R_l \frac{d\alpha_l}{d\tau} + \alpha_l R_l \alpha_l T = R_l - \alpha_l R_l - \sum_{k=1, k \neq l}^{3} \alpha_k R_k \alpha_l R_l T$$

Интегрируем это уравнение по пространству, разделим на величину $\int_V R_l(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l$ и используем стационарное решение. Решение получаем методом итераций

$$\alpha_l^2 P_l + \alpha_l - 1 - P_l \gamma_l = 0; \gamma_l \int_V (R_l T)(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l =$$

$$= \int_V \sum_{k=1, k \neq l}^{3} \alpha_k \alpha_l (R_k R_l T)(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l; \qquad .$$

$$\alpha_l = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4P_l^2 \gamma_l + 4P_l}}{2P_l} = 1 + P_l \gamma_l; P_l = \frac{\int_V (R_l T)(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l}{\int_V R_l(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l}$$

Критическое давление определится из уравнений при произвольном отрицательном значении $\gamma_l$

$$P_{crl} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \gamma_l}}{2\gamma_l}; \Delta p_{cr} = P_{cr} \frac{\rho v^2}{d^2}.$$

Точка начала ламинарного решения образуется при нулевом внешнем давлении величина давления на отрезке $P_l \in [0, \infty]$ определит значение $\gamma_l$ из уравнения $P_l = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\gamma_l}}{2\gamma_l}$. Решением этого уравнения является значение параметра $\gamma_l = -\frac{4P_l + 1}{4P_l^2}$. При положительном значении безразмерного давления, имеем отрицательное значение параметра, при этом надо выбирать отрицательное значение корня $P_l = \frac{1+\sqrt{1-\gamma_l}}{2(-\gamma_l)}$. В случае положительных значения параметра $\gamma_l$ комплексное решение не образуется, и турбулентный комплексный режим не образуется. .

Ламинарному решению соответствует $\gamma_l = 0, \alpha_l = \frac{1-\sqrt{1-4P_l}}{2P_l}$, простое устойчивое турбулентное решение получается при условии $\gamma_l = -1, \alpha_l = \frac{-1+\sqrt{1-4P_l^2+4P_l}}{2P_l}; \alpha_l = \frac{-1+i\sqrt{4P_l^2-1-4P_l}}{2P_l}$.

Итерационная схема выглядит следующим образом

$$(\alpha_l + \frac{1}{2P_l})^2 = \alpha_l^2 + \alpha_l \frac{1}{P_l} + (\frac{1}{2P_l})^2 =$$

$$= \sum_{k=1,k\neq l}^{3} \alpha_k \alpha_l a_{kl} + \frac{1}{P_l} + (\frac{1}{2P_l})^2; a_{kl} = \int_V (R_k T R_l)(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l / \int_V R_l T(y_1, y_2, y_3) d^3 y_l$$

$$\alpha_k (\delta_{kl} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{kl}) = \beta_l; \beta_l = -\frac{1}{P_l} + \frac{1}{P_l \alpha_l}$$

$$\alpha_k = (\delta_{kl} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{kl})^{-1} \beta_l$$

$$\beta_l^{n+1} = -\frac{1}{P_l} + \frac{1}{P_l (\delta_{lk} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{lk})^{-1} \beta_k^n}$$

$$\beta_l^2 + [\frac{1}{P_l} + \sum_{k=1,k\neq l}^{3} (\delta_{lk} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{lk})^{-1} \beta_k ]\beta_l + \frac{\sum_{k=1,k\neq l}^{3} (\delta_{lk} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{lk})^{-1} \beta_k}{P} - \frac{1}{P_l} = 0$$

Вычислим однозначное значение этой константы

$$\beta_l^0 = -\frac{1}{2P_l} - \frac{\gamma_l}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2P_l} - \frac{\gamma_l}{2})^2 + \frac{1}{P_l}}, \gamma_l = \sum_{k=1,k\neq l}^{3} (\delta_{lk} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{lk})^{-1} \beta_k \qquad (4)$$

Первое приближение $\beta_k = 0; k = 1,...,3; k \neq l; \gamma_l = 0$. Следующее приближение получается при условии $\beta_k = \beta_k^0, k = 1,...,3; k \neq l$. Нужно использовать действительную часть решения, получим действительное решение задачи гидродинамики. Оно соответствует положительным значениям коэффициента $\gamma_l$ и не имеет комплексных ветвей.

Это уравнение имеет комплексное решение, начальное приближение которого равно $\gamma_l^0 = \alpha_l^0 = \frac{1}{P_l} \pm i\frac{2}{\sqrt{P_;}}, \beta_l^0 = -\frac{1}{P_l} \mp \frac{i}{\sqrt{P_l}}$, которое получается из (4) при подкоренным выражением, равным нулю. Подставляя значение, получим уравнение по определению критического давления

$$\gamma_l = \frac{1}{P_l} \pm i\frac{2}{\sqrt{P_;}} = -\frac{1}{P_l} \mp \frac{i}{\sqrt{P_l}} + \sum_{k=1,k\neq l}^{3} (\delta_{lk} - \sum_{k=1,k\neq l}^{3} a_{lk})^{-1} (-\frac{1}{P_k} \mp \frac{i}{\sqrt{P_k}})$$

Оно сводится к уравнению $\sum_{k=1}^{3} B_{lk}(P_1, P_2, P_3) / \sqrt{-P_k} = 0$. Если определитель системы линейных уравнений равен нулю, то решение $1/\sqrt{-P_k}$ определяется с точностью до множителя. Этот множитель определяется из равенства нулю определителя. Итого имеем два комплексных решения этой системы уравнений и одно действительное. Задача сводится к определению корней полинома 3 степени с действительными коэффициентами. Эта задача имеет сходящееся решение начиная с критического отрицательного значения $P_l = P_{lcr}$. При действительных положительных значениях давления критического значения давления нет, и решение всегда ламинарное.

Для решения задачи необходимо определить 6 чисел $\alpha_l, \gamma_l$. Существует приближенная формула определения коэффициентов $\gamma_l$ при большом внешнем давлении, определяющая другую ветвь решения при условии $P >> 1$.

$$(\sqrt{\gamma_l+\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4}-\frac{1}{2P_l})\int_V(R_lT)(y_1,y_2,y_3)d^3y_l-$$
$$-\int_V\sum_{k=1,k\neq l}^{3}(\sqrt{\gamma_k+\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4}-\frac{1}{2P_l})\operatorname{Re}(R_kTR_l)(y_1,y_2,y_3)d^3y_l=$$
$$=[\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4]\int_V(R_lT)(y_1,y_2,y_3)d^3y_l/(\sqrt{\gamma_l+\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4}-\frac{1}{2P_l})=a_l(P_l)$$
$$\alpha_l=\frac{-1+\sqrt{4(P_l^2\gamma_l+P_l)+1}}{2P_l}=\sqrt{\gamma_l+\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4}-\frac{1}{2P_l}$$

Где константу $\gamma_l$ определим методом итераций, начальное приближение $\gamma_l=-1$. Добавляем комплексно сопряженное слагаемое, получаем линейную систему уравнений относительно $-\sqrt{\gamma_k+\frac{1}{P_k}+(\frac{1}{P_k})^2/4}+\sqrt{\gamma_k^*+\frac{1}{P_k}+(\frac{1}{P_k})^2/4}$

$$(\sqrt{\gamma_k+\frac{1}{P_k}+(\frac{1}{P_k})^2/4}-\sqrt{\gamma_k^*+\frac{1}{P_k}+(\frac{1}{P_k})^2/4})(\delta_{lk}-c_{lk})=b_l(P_l)$$

Откуда находим действительную и мнимую часть коэффициента $\gamma_k$ воспользовавшись условием $|\gamma_k|=1$. В результате определится фаза этого угла. Если фаза окажется комплексной, то предположение $|\gamma_k|=1$ надо изменить, внеся поправку в правую часть линейного уравнения. Оказалось одна ветвь имеет уравнение $\gamma_k=-\exp(i\varphi_k)$, а другая $\gamma_k=\exp(\varphi_k)$. Построим это решение

$$c_l=\sqrt{\gamma_l+\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4}-\sqrt{\gamma_l^*+\frac{1}{P_l}+(\frac{1}{P_l})^2/4}=2\sqrt{\frac{\sqrt{1+(\frac{1}{P_l})^2+2\frac{1}{P_l}\cos\varphi}-\cos\varphi-\frac{1}{P_l}}{2}}$$
$$(c_l^2/2+\frac{1}{P_l}+\cos\varphi_l)^2=(c_l^2/2+\frac{1}{P_l})^2-2\cos\varphi_l(c_l^2/2+\frac{1}{P})+\cos^2\varphi_l= .$$
$$=1+(\frac{1}{P_l})^2+\frac{2}{P_l}\cos\varphi$$

Решение этого уравнения

$$\cos\varphi_k = -(c_k^2/2 - \frac{1}{P_k}) \pm \sqrt{(c_k^2/2 - \frac{1}{P_k})^2 - (c_k^2/2 + \frac{1}{P_k})^2 + 1 + (\frac{1}{P_k})^2} =$$

$$= -(c_k^2/2 - \frac{1}{P_k}) \pm \sqrt{1 + (\frac{1}{P_k})^2 - \frac{2}{P_k}c_k^2}; c_k = \frac{\beta_k}{P};$$

$$\cos\varphi_k = \frac{1}{P_k} \pm 1 + O(\frac{1}{P^2}) =$$

$$= -(1 - \frac{1}{P_k}) + O(\frac{1}{P^2})$$

$$\sin\varphi_k = \pm\sqrt{1 - (1 - \frac{1}{P_k})^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{P_k}}$$

$$\alpha_l = -\frac{1}{2P_l} + \sqrt{-\exp(i\varphi_l) + \frac{1}{P_l} + (\frac{1}{P_l})^2/4}, \gamma_l = -\exp(i\varphi_l)$$

$$\cos\varphi_l = -(1 - \frac{1}{P_l}), \sin\varphi_l = \pm\sqrt{\frac{2}{P_l}}$$

Имеем комплексное решение

$$\alpha_l = -\frac{1}{2P_l} + i\sqrt{1 - \frac{2}{P_l} \pm i\sqrt{\frac{2}{P_l}}}$$

другая ветвь решения определяет $\gamma_l = (\cosh\varphi_l + \sinh\varphi_l) = \exp(\varphi_l)$ и определяет действительное решение при большом перепаде безразмерного давления

$$\alpha_l = -\frac{1}{2P_l} + \sqrt{\exp(\varphi) + \frac{1}{P_l} + (\frac{1}{P_l})^2/4}$$

## Выводы

Турбулентное решение при высоком внешнем давлении является комплексным. При условии $\gamma_l < 0$ получаем комплексное решение. Численная схема при большом давлении имеет две ветви решения, одна определяет комплексное значение параметра $\gamma_l = -\exp(i\varphi)$ и комплексное решение. Другая ветвь решения $\gamma_l = \exp(\varphi)$ и является действительным при большом давлении.