Причина перенормировок и их устранение

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

В комплексном пространстве введено произведение двух комплексно-сопряженных волновых функций. Это приводит к тому, что произведение комплексно-сопряженных чисел положительно, но имеются ситуации, когда это произведение отрицательно. Тогда определить волновые функции невозможно. В данной статье показано, что такая ситуация приводит к бесконечности решения и требуются перенормировки. Но имеется другой выход, надо использовать обратные функции. по аналогии с обратными матрицами. Тогда модуль числа не образуется и перенормировки не требуются.

Упрощение вычислений в комплексном пространстве

В комплексном пространстве возможно описание скалярного поля без использования перенормировок. Перенормировки в квантовой теории поля возникли из-за стремления действительного решения к бесконечности, при наличии комплексных координат положения равновесия. Простейшей системой, для которой используется перенормировка, является функция плотности Лагранжа скалярного поля, которая в случае комплексного скалярного поля имеет вид

$$L = (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^*) - m^2 \varphi \varphi^* - g(\varphi \varphi^*)^2 / 2$$

При этом тензор плотности энергии и импульса равен

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi - L g_{\mu\nu}$$

При этом плотность энергии и импульса равна

$$T_{00}=\hbar(\frac{\partial\varphi^*}{c\partial t}\frac{\partial\varphi}{c\partial t}+\nabla\varphi^*\nabla\varphi+m^2c^2\varphi^*\varphi/\hbar^2+g(\varphi^*\varphi)^2/2)$$

$$cT_{i0}=\hbar(\frac{\partial\varphi^*}{c\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}+\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{c\partial t}).$$

Тензор энергии и импульса является действительным. При этом поле φ имеет размерность $cm^{-1/2}s^{-1/2}$.

А импульс и энергия поля равны при условии $g=0$, где φ нормировано

$$P_\mu=\int T_{\mu 0}d^3x .$$

Перенормировка возникает при условии модуля величины, равного отрицательному значению. Возникает редкая ситуация $(xx^*)=-\varepsilon<0$, решение этого уравнения не существует ни в действительных, ни в комплексных числах. Когда оно равно $xx^*=-\varepsilon$ и величина x не определяется, но определяется положительная величина $xx^*=\varepsilon$, Решение в данной точке представляется в виде $xx^*=\frac{2(xx^*)^2}{xx^*+xx^*}=\frac{2\varepsilon^2}{xx^*+\varepsilon}=-\varepsilon$, образуется бесконечность $xx^*=\frac{2\varepsilon^2}{-\varepsilon+\varepsilon}$. Если представить решение в виде $\frac{2x^4}{x^2+x^2}=x^2=-\varepsilon$, то получим решение $x^2=-\varepsilon; x=i\sqrt{\varepsilon}$ и значение x определяется $x^2=\frac{2x^4}{x^2+x^2}=-\varepsilon$. Если не использовать вычисление каждого коэффициента ряда решения, а пользоваться теорией возмущений, то образуется согласно той же схеме бесконечность решения.

Говорится, что от величины m_0 решение не зависит и определяют ее как большую константу. Тогда вводят величину $i\sqrt{\varepsilon}/m_0\to 0$ и особенность устраняется в теории возмущений, так как от величины m_0 решение не зависит, а не правильных членов редкое количество. Но если не имеется константы, от которой решение не зависит, то перенормировки при использовании теории возмущений не работают. В любом случае это решение приближенное, не учитывающее значение x при отрицательном модуле. Считается, что относительная ошибка метода $\sqrt{\varepsilon}/m_0$ и надо выбирать m_0 большим. Но если правильно считать точность метода, то получится относительная ошибка $\varepsilon/\sum_{n=1} x_n^2$ и в случае редкого события - отрицательного значения корня, эта ошибка мала. Но решение содержит потенциальный произвол, от которого надо избавиться предлагаемыми методами.

Продемонстрируем эту идею на примере интеграла Фейнмана. Момент второго порядка определяется по формуле

$$\hat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\int\int d^4x d^4x' \cdot T(\hat{j}^{\mu}(x)\hat{j}^{\nu}(x'))T(\hat{A}_{\mu}(x)\hat{A}_{\nu}(x')) \qquad (1)$$

Доказывается, что этот интеграл равен

$$S_{аш} = ie^2\int\int d^4x d^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x-x')\{(\overline{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_2)(\overline{\psi}_2'\gamma^{\nu}\psi_1') - (\overline{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_1)(\overline{\psi}_3'\gamma^{\nu}\psi_2')\};$$
$$\overline{\psi}_4 = \hat{a}_4\overline{\psi}; \psi_2 = \hat{a}_2^{+}\psi, \overline{\psi} = \sum_p \hat{a}_p^{+}\overline{\psi}_p; \psi = \sum_p \hat{a}_p\psi_p$$

Расписав уравнение (1) с помощью подстановки $\hat{j}^{\mu} = \hat{\overline{\psi}}\gamma^{\mu}\hat{\psi}$, получим значение выражения для 32 коэффициентов перед $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$. Откуда можно будет вычислить значение 16 компонент для каждой из двух образовавшихся частиц, итого 32 неизвестных компонент спинора $\overline{\psi}_p\psi_q$. Если по крайней мере одно из выражений $\overline{\psi}_p\psi_p$ окажется отрицательным, то возникнет бесконечность, модуль становятся отрицательным.

Но как построить алгоритм, чтобы его Лагранжиан был инвариантный и не включал операцию взятия модуля волновой функции. Просто квадрат волновой функции не инвариантен относительно экспоненты с мнимым показателем. Надо построить обратные функции, по аналогии с обратными матрицами. Это сделано в статье [1].

Литература

1. Якубовский Е.Г. Скалярное произведение в квантовой механике без знака комплексного сопряжения. «Энциклопедический фонд России», 2018, 26стр. http://russika.ru/userfiles/390_1552136880.pdf