Комплексные траектории планет при малом эксцентриситете

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Имея значение эксцентриситета, массы планеты и радиус малой полуоси, при парном взаимодействии, можно вычислить скорость планеты в точке малой полуоси. При эксцентриситете меньшем 0.707, получается комплексная скорость планеты. Кроме того, единообразным образом описаны гиперболическая и эллиптические траектории. При таком единообразном описании переход к мнимым углам, получаются инвариантные формулы. Имеются стабильные траектории планет, обусловленные Солнцем. Но помимо их имеются имеющие меньший период траектории, связанные с взаимодействием планет между собой. Это влияние хаотическое, что проявляется в построенных графиках взаимодействия планет между собой см. [2] рис.4. Если траектории между Солнцем и планетами вычислены действительные, то между планетами возникает мнимый эксцентриситет, который приводит к комплексным траекториям, содержащим дисперсию и, следовательно, являющуюся случайными. Проявляется это в хаотическом влиянии на траектории взаимодействие планет между собой. Уравнения описывающие траектории планет, являются хаотическими. Но хаос в траекториях ограничен 0.5% траектории и на траектории между Солнцем и планетами не влияет.

Вычислим скорость планет в точке большой оси эллипса. Считаем, что величина $M >> m$. Энергия тела меньшей массы равна в системе координат, где центр системе координат расположен в центре эллипса (не в точке фокуса)

$$E = mV^2/2 + \frac{m^2V^2b^2}{2mb^2} - G\frac{Mm}{b} = mV^2 - G\frac{Mm}{b} \qquad (1)$$

Эксцентриситет в книге [1] определяется по формуле

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}; L = mVb, \alpha = GmM$$
$$E = \frac{e^2 - 1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{V^2 b^2} \qquad (2)$$

Эллиптическим комплексным траекториям планет соответствует большая отрицательная энергия, тогда эксцентриситет становится мнимым. Приравниваем значение энергии

$$\frac{e^2 - 1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{V^2 b^2} = mV^2 - G\frac{Mm}{b} \qquad (3)$$

В частности, согласно теореме вириала для Ньютоновского взаимодействия $k = -1$, потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию между телами. Тогда получаем равенство потенциальной энергии удвоенной кинетической энергии с обратным знаком и равенство полной энергии кинетической с обратным знаком. При этом удвоенная кинетическая энергия равна потенциальной энергии с обратным знаком, т.е. $V^2 = \frac{GM}{2a}$. Но справедливо уравнение (2)

$$\frac{e^2 - 1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{V^2 a^2} = -mV^2 = -G\frac{Mm}{2a} \qquad (4)$$

Согласно которой в соответствии с условием (4), получаем $e^2 = 0$. Выполнение теоремы вириала плюс условие (2) требует круговой траектории с единственным значением эксцентриситета.

Как можно подсчитать эксцентриситет в квантовой механике $e = \sqrt{1 + \frac{2E\hbar^2 l(l+1)}{me^4}} = \sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{n^2}} \neq 0$. Если можно говорить о траектории, то она явно эллиптическая, а не круговая, и в классическом пределе переходит в круговую.

Распишем условие (2) по определению скорости в точке с координатой большой оси. Получаем квадратное уравнение относительно квадрата скорости

$$V^4 - G\frac{M}{b}V^2 - \frac{e^2-1}{2}\frac{G^2M^2}{b^2} = 0.$$

Получаем два решения этого уравнения для определения скорости тела, соответствующие большой и малой оси (разные значения величины a).

$$V^2 = G\frac{M}{2b}[1 \pm \sqrt{1+2(e^2-1)}] = G\frac{M}{2b}[1 \pm \sqrt{2e^2-1}].$$

Скорость в точке малой оси равна

$$V = \sqrt{G\frac{M}{2b}(1 \pm \sqrt{2e^2-1})} = \sqrt{G\frac{M}{2b}(1 \pm i\sqrt{1-2e^2})} = \sqrt{G\frac{M}{2a}\frac{1 \pm i\sqrt{1-2e^2}}{\sqrt{1-e^2}}},$$
$$|V| = \sqrt{G\frac{M\sqrt{1-e^2}}{b}} = \sqrt{G\frac{M}{a}} \qquad (5)$$

Причем вычисленное действительное и комплексное значение энергии правильно определяет эксцентриситет траектории двух тел. Знак квадратного корня из квадрата модуля величины является положительным, если, фаза угла комплексного числа, соответствует 1 или 2 четверти осей координат, и знак минус, если во 3, 4 четверти $-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{\operatorname{Im}V}{\operatorname{Re}V} \le \frac{\pi}{2}$. Причем величины для получения действительного решения эксцентриситет должен удовлетворять неравенству $e > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$. Но как известно все планеты Солнечной системы не удовлетворяют этому равенству, например Земля имеет эксцентриситет $e = 0.01675$.

Каков же выход из этой ситуации. Либо эксцентриситет измерен неправильно, либо скорость, а значит и координата является комплексной. Эксцентриситет правильно описывает траекторию планет, значит его значение справедливое. Тогда энергия и момент импульса являются комплексные. Момент импульса равен $L = mVb = mb\sqrt{G\frac{M}{2b}(1+i\sqrt{1-2e^2})}, \sqrt{|L|^2} = mb\sqrt{\frac{GM}{b}\sqrt{1-e^2}} = ma\sqrt{\frac{GM(1-e^2)}{a}}$. Энергия тела получается подстановкой комплексного значения скорости в уравнение (1) и равна

$$E = -\frac{GMm(1-i\sqrt{1-2e^2})}{2b} = \frac{GMm(-1+i\sqrt{1-2e^2})}{2b}, \sqrt{|E|^2} = -\frac{GMm\sqrt{1-e^2}}{2b} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Параметр $p = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{V^2b^2}{GM} = \frac{b(1+i\sqrt{1-2e^2})}{2}, |p| = b\sqrt{1-e^2} = a(1-e^2)$.

Использование действительной энергии, как и комплексной энергии правильно определяет не нулевой эксцентриситет при непосредственном счете по формуле $\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1-\frac{2GMm}{2a}\frac{GMm^2a(1-e^2)}{mG^2M^2m^2}} = e$.

Но данная формула определяет не имеющий физического смысла значение эксцентриситета, если считать по формуле (2) с действительными формулами, $V^2 = G\frac{M\sqrt{1-e^2}}{b} = G\frac{M}{a}$

$$\frac{e^2-1}{2}\frac{G^2M^2m}{V^2b^2} = G\frac{Mm\sqrt{1-e^2}}{b} - G\frac{Mm}{b}, e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

В комплексном пространстве счет по формуле (2) приводит к тождественному уравнению.

$$\frac{e^2-1}{2}\frac{G^2M^2m}{V^2b^2} = \frac{e^2-1}{2}\frac{2GM}{b(1\pm i\sqrt{1-2e^2})} = mV^2 - G\frac{Mm}{b} = mG\frac{M}{2b}(1\pm i\sqrt{1-2e^2}) - G\frac{Mm}{b} =$$
$$= -mG\frac{M}{2b}(1\mp i\sqrt{1-2e^2})$$

Умножая обе части данного уравнения на величину $(1\pm i\sqrt{1-2e^2})$, получим

$$(e^2-1) = -(1\pm i\sqrt{1-2e^2})(1\mp i\sqrt{1-2e^2})/2 = -(1-e^2).$$

Получилось, что использование действительных координат, вместо комплексных требует осторожности и может привести к абсурдному результату. Складывать величины, полученные из комплексных может привести к ошибке, а умножение величин к ошибке не приводит.

Тогда уравнение поверхности запишется в виде

$$r = a(1 - e\cos\xi), t = \sqrt{\frac{a}{GM}}(\xi - e\sin\xi)$$
$$x = a(e - \cos\xi); y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi, \qquad (6)$$
$$(x - ae)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

При большой отрицательной энергии планет, эксцентриситет становится мнимым, с мнимым смещением. Эксцентриситет проходит нулевое значение по мере уменьшения отрицательной собственной энергии планет, соответствующее круговой траектории, и становится мнимым, с мнимым смещением по оси x. Мнимое значение эксцентриситета, по модулю большее 1, реализуется для парных траекторий между планетами Солнечной системы. Период взаимодействия планет между собой сильно различается, что приводит к хаотическому влиянию планет между собой и проявляется во мнимом смещении орбиты. Как показал численный счет см. [2] рис.4 мнимость смещения орбиты приводит к хаотическим колебаниям парных траекторий планет между собой.

Причем в книге [1] не правильно определены эллиптические траектории, получаются противоречивые формулы уравнения эллипса в декартовых координатах, и надо делать предположения, что координата x отрицательная. Но уравнение в декартовых координатах отличается от уравнения в эллиптическом и гиперболическом случае, если использовать формулы, приведенные в [1]. Получается, что они не переходят в гиперболические траектории и они имеют вид

$$x = a(\cos\xi - e); y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi,$$
$$(x + ae)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

Достаточно изменить знак у координаты x и гиперболические и эллиптические координаты будут описаны единообразными по формулам (6) и (7).

Гиперболические траектории имеют вид (7), причем положительному времени соответствует положительный угол гиперболической функции

$$
\begin{gathered}
r = a(e\cosh\eta - 1); t = \sqrt{\frac{ma^2}{\alpha}}(e\sinh\eta - \eta) \\
x = a(e - \cosh\eta); y = a\sqrt{e^2 - 1}\sinh\eta \quad . \\
(x - ae)^2 - \frac{y^2}{(e^2 - 1)} = a^2
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Оно удовлетворяет гиперболической траектории и получается из эллиптической траектории переходом к мнимому углу.

Уравнения движения в безразмерном виде в действительном пространстве приобретут вид

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2\mathbf{r}_n}{dt^2} = -\gamma\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta_k(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^3}, \delta_k = \frac{m_k}{M}; M = \sum_{p=1}^{N} m_p \\
\gamma = \frac{GM}{[\sum_{k=1}^{n}\delta_k\sqrt{(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k)}]^3}; \mathbf{a}_k = const \quad . \\
\mathbf{r}_k = \frac{\mathbf{R}_k}{\sum_{k=1}^{n}\delta_k\sqrt{(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k)}} = \frac{\mathbf{R}_k}{a}; \mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{V}_k}{\sum_{k=1}^{n}\delta_k\sqrt{(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_k)}}
\end{gathered}
$$

Если учитывать взаимодействие тел между собой, то эксцентриситет окажется комплексным и пространство является комплексным.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика т.I, Наука, М.,1965г., 294с.
2. *Якубовский Е.Г.* Определение орбит планет с учетом размера и скорости вращения планет «Энциклопедический фонд России», 2019, 19стр. http://russika.ru/userfiles/390_1552053965.pdf