Учет критического числа Рейнольдса
при решении задачи гидродинамики

Якубовский Е.Г.
e-mail yakubovski@rambler.ru

Решение уравнения Навье-Стокса требует усреднения решения как в ламинарном, так и в турбулентном режиме. Надо получить решение линейной части уравнения для каждой компоненты скорости в зависимости от радиуса не радиальной части решения. Это продольная компонента скорости в случае трубопровода, или угловая часть решения в двумерном или трехмерном случае в случае вращающегося тела. Зависимость от радиуса надо видоизменить, введя смещение центра радиуса и учитывая несколько членов с одним коэффициентом пропорциональности. Далее подставить в уравнение Навье-Стокса, учитывая производные только по радиусу и вводя коэффициент пропорциональности. Конвективный член окажется равным нулю. Но его можно учесть, вводя степень молекулярных шероховатостей размера тела, в зависимости от угла, определяя таким образом критическое число Рейнольдса как средний модуль тангенса наклона молекулярной шероховатости. Далее усредняем уравнение по пространству, что оправдывает не учет производных по углам. Находим коэффициент пропорциональности из стационарного решения этого уравнения. Учтется критическое число Рейнольдса, соответствующее наступлению турбулентного режима.

Рассмотрим ламинарное решение уравнения Навье-Стокса, описывающее вращающийся цилиндр. Уравнение описывающее вращающийся поток имеет вид см. [1] §18

$$\begin{gathered}\frac{dp}{dr} = \rho\frac{V_\varphi^2}{r}; \frac{dU}{dr} = m\frac{V_\varphi^2}{r} \\ \frac{d^2V_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r^2} = 0\end{gathered}. \qquad (1)$$

Причем аналогом давления является потенциал, а аналогом плотности среды является масса частицы. Это следует из связи решения уравнения Шредингера и Навье-Стокса см. [2]. Вихрь будем задавать в виде непрерывной функции

$$V_\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r}-\mathbf{a})}}{\sqrt{(\mathbf{r}_1-\mathbf{a},\mathbf{r}_1-\mathbf{a})}}, r < r_1 \\ \dfrac{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r}-\mathbf{a})}}{\sqrt{(\mathbf{r}_1-\mathbf{a},\mathbf{r}_1-\mathbf{a})}} \dfrac{r_2 - r}{r_2 - r_1} + \dfrac{\sqrt{(\mathbf{r}_2-\mathbf{a},\mathbf{r}_2-\mathbf{a})}}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r}-\mathbf{a})}} \dfrac{r - r_1}{r_2 - r_1}, r_1 < r < r_2 \\ \dfrac{\sqrt{(\mathbf{r}_2-\mathbf{a},\mathbf{r}_2-\mathbf{a})}}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r}-\mathbf{a})}}, r > r_2 \end{cases}.$$

Интегрируем эту формулу по углам, оставляя зависимость только от радиуса. Тогда дифференциальное уравнение, которому будут удовлетворять вихри соответствует (1). В природе вихри рассматриваются как внутренние, которые существуют конечное время, расширяются и проходят конечное расстояние. Я же предлагаю рассматривать вращающееся тело и вызванное возмущение среды этим вращением. Внешние вихри сжимаются и существуют бесконечное время.

Вычислим верхнюю и нижнюю границу переходной зоны из условия, что верхняя граница совпадает с размером вихря, а нижняя определяет нулевую силу, действующую на объем вихря

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\frac{\partial U}{\partial R} r_2^2(\theta,\varphi) - \frac{\partial U}{\partial R} r_1^2(\theta,\varphi)] \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\rho V_\varphi^2 r_2(\theta,\varphi) - \rho V_\varphi^2 r_1(\theta,\varphi)] \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi} = 0$$

Внутренняя граница переходной зоны окажется расталкивающей, а внешняя граница сжимающей, откуда определится изменение радиуса внутренней границы.

Так как уравнение линейное, можно добавить линейным образом дополнительный член со смещенным центром. Тогда решение будет выглядеть следующим образом

$$U_\varphi(\mathbf{r}) = \alpha[V_\varphi(\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_1,\mathbf{r}-\mathbf{a}_1)}) + V_\varphi(\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2,\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)})].$$

Запишем уравнение с учетом нелинейного члена для получения турбулентного решения

$$U_\varphi \frac{1}{r}\frac{dU_\varphi}{dr_l}\frac{dr_l}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial r_l}\frac{dr_l}{d\varphi} + \nu\left(\frac{d^2U_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_\varphi}{dr} - \frac{U_\varphi}{r^2}\right)$$

Подставим решение в виде $U_\varphi(r) = \alpha[V_\varphi(\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_1,\mathbf{r}-\mathbf{a}_1)}) + V_\varphi(\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2,\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)})]$, где коэффициент α надо вычислить. Перепад давления или потенциал частиц, образующих систему, определяет скорость вращения вихря. Подставим данное решение в уравнение и усредним по пространству, получим

$$\alpha^2 a / R_{cr} - \alpha b + c / R_{cr} = 0, \frac{dr_l}{r d\varphi} = \frac{1}{R_{cr}} = \frac{1}{2300},$$
$$a = \int U_\varphi \frac{dU_\varphi}{dr_l} d^2x; b = \int \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right) U_\varphi d^2x; c = \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_l} d^2x \, .$$

Откуда имеем решение $\alpha = \frac{bR_{cr} - \sqrt{b^2R_{cr}^2 - 4ac}}{2a}; b^2 \sim V_\varphi^2; ac \sim V_\varphi^4$. Ламинарное решение $\alpha = c / bR_{cr}$. Тогда задача будет определять граничные условия. Турбулентное решение означает связанное состояние и определяет счетное количество энергий $\alpha_n = \frac{bR_{cr} - i\sqrt{4ac - b^2R_{cr}^2}\beta_n}{2a}$, причем необходимо ввести коэффициент β_n, учитывающий степень шероховатости см. [2]. Комплексная скорость определяет комплексные граничные условия. Счетное количество решений получается за счет счетного количества множителей, зависящих от квантовых чисел, учитывающих шероховатость. Используя волновую функцию нужно считать отношение среднего к среднеквадратичному отклонению для вычисления степени шероховатости $\beta_n = R_{cr}\frac{\sqrt{d_n}}{m_n}$, которая к тому же зависит от внешнего давления см. [2].

Скорость движения в декартовой системе координат равна

$$u_x(r) = \alpha_n\{V_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_1,\mathbf{r}-\mathbf{a}_1)}]\cos\varphi_1 + V_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2,\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)}]\cos\varphi_2\}$$
$$u_y(r) = \alpha_n\{V_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_1,\mathbf{r}-\mathbf{a}_1)}]\sin\varphi_1 + V_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2,\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)}]\sin\varphi_2\}$$
$$V_z = 0$$

Распределение давления имеет следующий вид

$$p(r)-p_0=\int\limits_r^{\infty}+\int\limits_r^{0}\rho\alpha_n^2[V_\varphi(\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2,\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)})+V_\varphi(\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_2,\mathbf{r}-\mathbf{a}_2)})]^2\,dr\,.$$

Причем на поверхности тел имеем равномерное распределение давления, т.е. давление не создает толкающую силу. Линейная часть скорости создает расталкивающую силу, внешняя часть решения создает сжимающее давление. Увеличивающийся в размере вихрь имеет конечное время жизни и описывает элементарные частицы с конечным временем жизни. Сжимающийся вихрь имеет бесконечное время жизни.

Аналогично и скорость на поверхности вращающихся тел создает равномерную силу, имеющую расталкивающую на радиусе $r_1=r_1(\theta,\varphi)$ и сжимающуюся часть на радиусе $r_2=r_2(\theta,\varphi)$. Приравнивая эту силу нулю получим нижнюю границу переходной зоны, имеющую одинаковое значение для двух вихрей

$$F=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial R}d\varphi/2\pi=\int\limits_0^{2\pi}\rho U_\varphi^2 d\varphi/2\pi=0$$

Имеется разная форма внешней части вихря $r_2=r_2(\theta,\varphi)$. Это приводит к устойчивой и неустойчивой с конечным временем жизни формы вихря или элементарной частицы.

При этом будет вращение по углу в зависимости от квантовых чисел n_k

$$n_k\frac{d\varphi_k}{d\tau_k}=\ln V_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_k,\mathbf{r}-\mathbf{a}_k)}];\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{V}(t,\mathbf{r});\frac{dR_k}{dt}=\operatorname{Im}\alpha cV_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{a}_k,\mathbf{r}-\mathbf{a}_k)}],$$

$$\tau_k=\omega_k t=\operatorname{Im}\alpha\frac{ct}{R_k}\lambda_0\qquad.$$

$$\int\limits_0^{\tau_k}\ln V_\varphi[\sqrt{(\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}_k,\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}_k)}]d\tau_k=-n_k\varphi_k$$

Список литературы

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика. -М.: Наука, 1980.-535с.

2. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2018, 66 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1538004822.pdf