Описание скорости течения между двумя цилиндрами

при произвольной скорости их вращения

Е.Г. Якубовский

e – mail yakubovski@rambler.ru

В книге [1] описана скорость вращения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при увеличивающемся числе Рейнольдса. Но вычисление этой скорости вращения не было реализовано, из-за математических проблем. В данной статье эти проблемы разрешены и описаны основные режимы вращения несжимаемой жидкости с помощью комплексного решения.

В книге [1] приведено описание экспериментально обнаруженных основных режимов работы системы вращения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами. В данной статье изложена теория этих экспериментов.

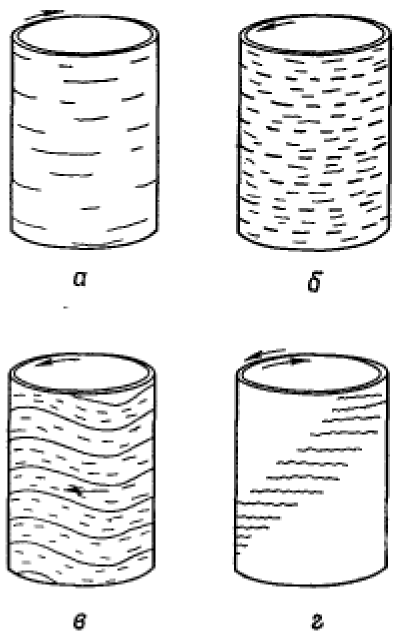

Рис. 1

Рассмотрим ламинарное решение уравнения Навье-Стокса, описывающее вращающийся цилиндр. Уравнение описывающее вращающийся поток имеет вид см. [2] §18

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V_\varphi^2}{r}$$
$$\frac{d^2 V_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r^2} = 0 .$$

Решение второго уравнения является функция

$$V_\varphi(r) = ar + \frac{b}{r}; a = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; b = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; r_1 < r_2 /$$

Построим асимптотику коэффициентов при условии $r_2 \to r_1$

$$a = \frac{\omega_ч - \Omega_1(1 - 2\Delta r / r)}{2\Delta r} r. = \frac{d\omega_x}{2dr} + \Omega_1; b = -\frac{d\omega_x}{2dr} 2\pi i n r^3$$

Число Рейнольдса определяется по формуле $R = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(r_2 - r_1)^2}{\nu}; \Omega_1 > \Omega_2$.

Уравнение с зависимостью от продольной координаты выглядит таким образом

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_\varphi \frac{\partial r_l}{r_l \partial\varphi}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r_l} = -\frac{\partial p}{\rho r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2}, V_\varphi = (ar + \frac{b}{r}) g(z / r_2 - \sin \omega t)$$

Подставим данное решение в уравнение и усредним по пространству, получим

$$-r_2 \omega \cos \omega t \frac{dg}{dz} + f g^2 (z / r_2 - \sin\varphi) / R_{cr} + c / R_{cr} + h \frac{d^2 g(z / r_2 - \sin\varphi)}{dz^2} = 0, \frac{dr_l}{r_l d\varphi} = \frac{1}{R_{cr}} = \frac{1}{2300},$$

$$f = \int V_\varphi \frac{dV_\varphi}{dr_l} r dr = \int_{r_1}^{r_2} (a \frac{da}{dr_l} r^3 + a \frac{db}{dr_l} r + b \frac{da}{dr_l} r + b \frac{db}{dr_l}\frac{1}{r}) dr =$$

$$= a^2 r^3 / 2 + abr + b\frac{db}{dr}(\ln \frac{r}{r_1} + 2\pi i n) =$$

$$= a\frac{da}{dr_l}(r_2^4 - r_1^4)/4 + (a\frac{db}{dr_l} + b\frac{da}{dr_l})(r_2^2 - r_1^2)/2 + b\frac{db}{dr_l}(\ln\frac{r_2}{r_2} \pm 2\pi i n)$$

$$c(r_2^2 - r_1^2)/2 = \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_l} r dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr_l}\int_{r_1}^{r} V_\varphi^2(u) du r dr = \int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r} (\frac{da^2}{dr_l}u^3 + \frac{d2ab}{dr_l}u + \frac{db^2}{dr_l}\frac{1}{u}) du r dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} [2a\frac{da}{dr_l}(r^4 - r_1^4)/4 + (a\frac{db}{dr_l} + b\frac{da}{dr_l})(r^2 - r_1^2) + 2b\frac{db}{dr_l}(\ln\frac{r}{r_1} \pm 2\pi i n)] r dr$$

$$c = a^2 r^3 + 2abr + 2b\frac{db}{dr}(\ln\frac{r}{r_1} + 2\pi i n)$$

В данных формулах использована асимптотика $r_2 \to r_1$. Рассматривается отдельно член пропорциональный частоте и квадрату частоты $-r_2\omega\cos\omega t\frac{dg}{dz} + h\frac{d^2 g(z/r_2 - \sin\varphi)}{dz^2} = 0,\ fg^2(z/r_2 - \sin\varphi)/R_{cr} + c/R_{cr} = 0$. При малых числах Рейнольдса первое уравнение имеет значение константы, которую приравняем 1. При больших числах Рейнольдса образуется волна на внешней поверхности цилиндра. При большом значении квантового числа имеем следующие значения асимптотических формул $b\frac{db}{dr_l} = 0$. Это приводит к действительной частоте вращения, равной скорости вращения внутреннего или внешнего цилиндра без образования локальных вихрей или неоднородностей.

Причем если в объеме между цилиндрами произошло излучение энергии квантовое число на внешней и внутренней поверхности цилиндра разное и их разность целое число. Задавая величину скорости вращения Ω_1 определяем из квадратного уравнения две величины комплексной скорости $\omega_{ч\pm}$, причем определится комплексное значение радиуса r_x, $\Omega_2 r_2 = \omega_{x\pm n} r_{x\pm n}; \Omega_2 <|\omega_{x\pm n}|$, причем скорость вращения на отрезке $[r_1, |r_{x-n}|]$ будет действительная, на отрезке $[|r_{x-}|, |r_{x+}|]$ комплексная, а на отрезке $[|r_{x+n}|, r_2]$ действительная. Будут образовываться полоски с радиусом $[|r_{x-n}|, |r_{x+n}|]$ при некотором угле $\varphi_{n\pm}$. Угол $\varphi_{n\pm}$ надо определять из условия $\frac{dr(\varphi_{n\pm} - \mathrm{Im}\,\omega_{x\pm n} t)}{\pm \mathrm{Im}\, r_{x\pm n} d\varphi} = \frac{\mathrm{Re}\, r_{x\pm n}\tan(\varphi_{n\pm} - \mathrm{Im}\,\omega_{x\pm n} t)/4}{\pm \mathrm{Im}\, r_{x\pm n} R_{cr}} = \frac{1}{R_{cr}}$, причем согласно формуле (1), (1a) действительная часть радиуса больше мнимой части. Угол надо делить на 4, чтобы при максимальном и минимальном радиусе вихря получать предельный угол $\varphi_{m\pm} = \pm\pi$. Изменение положения полосок надо определить совпадающим со скоростью их вращения для получения стационарной картины положения полосок. Данная картина течения описывается Рис.1 а,б

В случае $|r_{x+n}| > r_2$ комплексный режим будет распространяться на всю область $[|r_{x-n}|, r_2]$. В случае $|r_{x-n}| > r_2$ течение будет регулярное действительное. Для существования комплексного решения имеется ограничение на частоту вращения внешнего цилиндра что следует из условия $\Omega_2 r_2 = \omega_{x\pm n} r_{x\pm n}; \Omega_2 < |\omega_{x\pm n}|$. В комплексной области будет образовываться колебание с амплитудой

$$r(t) = [\operatorname{Re} r_{x+n} + \operatorname{Im} r_{x+n} \sin(\operatorname{Im} \omega_{x+n} t)] \frac{r - r_{x-n}}{r_{x+n} - r_{+-n}} + [\operatorname{Re} r_{x-n} + \operatorname{Im} r_{x-n} \sin(\operatorname{Im} \omega_{x-n} t)] \frac{r_{x+n} - r}{r_{x+n} - r_{+-n}}$$

вокруг действительной части радиуса $\operatorname{Re} r_{xn}$ см. [3]. В предельных случаях получается правильное значение вращения. В промежуточном случае интерполяция. Уравнение после приведения комплексных подобных членов выглядит следующим образом. $\gamma_n \omega_{чn}^2 - 2\beta_n \Omega_1 \omega_{чn} + \alpha_n \Omega_1^2 = 0$. Комплексное решение этого уравнения $\omega_{чn} = \Omega_1 \frac{\beta_n \pm \sqrt{\beta_n^2 - \alpha_n \gamma_n}}{\gamma_n}$. Причем имеется множество решений, соответствующих разным целым квантовым числам n. Если внешний цилиндр не вращается, то комплексное решение заполняет весь объем между цилиндрами с частотами, зависящими от целых чисел.

В случае нулевого квантового числа n получается $r(t) = r$ и завихрений нет. Если в этом случае дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то имеются радиальные колебания

$$\frac{dr(t)}{dt} = \operatorname{Im}\omega_{x+} \operatorname{Im} r_{x+} \cos(\operatorname{Im}\omega_{x+} t)] \frac{r - r_{x-}}{r_{x+} - r_{+-}} + \operatorname{Im}\omega_{x-} \operatorname{Im} r_{x-} \cos(\operatorname{Im}\omega_{x-} t)] \frac{r_{x+} - r}{r_{x+} - r_{+-}} = \\ = \operatorname{Im}\omega_x \operatorname{Im} r_x \cos(\operatorname{Im}\omega_x t)] \quad .$$

и образуется вращение относительно вычисленного радиуса со скоростью

$$V_\varphi = \operatorname{Im}\omega_x [r(t) - \operatorname{Re} r_x] = \operatorname{Im}\omega_x \operatorname{Im} r_x \sin(\operatorname{Im}\ \omega_x t)$$
$$[\frac{dr(t)}{dt}]^2 + \{\operatorname{Im}\omega_x [r(t) - \operatorname{Re} r_x]\}^2 = V_r^2 + V_\varphi^2 = (\operatorname{Im}\omega_x \operatorname{Im} r_x)^2 \, .$$

$$X(t) - \operatorname{Re} X_x = \operatorname{Im} r_x \cos(\operatorname{Im}\omega_x t)$$
$$Y(t) - \operatorname{Re} Y_x = \operatorname{Im} r_x \sin(\operatorname{Im}\ \omega_x t)$$

Вихрь соответствует образованию окружности из координат, которая вращается с угловой скоростью, и ортогональной скорости радиусу этой окружности. В случае комплексного корня уравнения, при квантовом числе равном нулю при радиусе $\operatorname{Re} r_x$ образуется вихрь с амплитудой координаты $\operatorname{Im} r_x$. Скорость потока описывает окружность, при этом координата равна движению по окружности со смещенным центром.

Задавая величину Ω_2 и определяя комплексную величину ω_x на месте частоты Ω_1 получим еще одну совокупность решений. Тогда получим условие $|\omega_x| < \Omega_1$. Если внутренний цилиндр не вращается, то комплексное решение не образуется и имеется ламинарное действительное решение по стандартной формуле.

Скорость движения в декартовой системе координат равна

$$V_x(r) = (\frac{c_1}{r} \cos\varphi_1 + c_2 r \cos\varphi_2)$$
$$V_y(r) = (\frac{c_1}{r} \sin\varphi_1 + c_2 r \sin\varphi_2)$$
$$V_z = 0$$

Тогда при определенном числе Рейнольдса получим вращающуюся волну $\varphi_1 = \operatorname{Im}\omega_{x+n}t, \varphi_2 = \operatorname{Im}\omega_{x-n}t,$ и наоборот.

При условии $r_2 \to r_1$ определим частоту колебаний дискретных образований, имеем уравнение

$$\frac{3}{2}\left(\frac{d\omega_x}{2dr}r + \Omega_1\right)^2 r^3 - 4\left(\frac{d\omega_x}{2dr}r + \Omega_1\right)\frac{d\omega_x}{2dr}2\pi i n r^4 - 6\left(\frac{d\omega_x}{dr}\right)^2 \pi^2 n^2 r^5 = 0$$

Получается квадратное уравнение

$$\left(\frac{d\omega_x}{dr}\right)^2\left(\frac{3}{8} - 2\pi i n - \pi^2 n^2\right) - \frac{d\omega_x}{dr}\frac{\Omega_1 4\pi i n}{r} + \frac{3\Omega_1^2}{2r^2} = 0$$

Откуда получаем два решения

$$\omega_{x\pm n} = \Omega_1 + \Omega_1 \ln\frac{r_2}{r_1}\frac{-2\pi i n \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}\left(\pi^2 n^2 + 2\pi i n - \frac{3}{8}\right)}}{2\pi i n + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}} =$$

$$= \Omega_1 + \Omega_1 \ln\frac{r_2}{r_1}\operatorname{Re}\frac{-2\pi i n \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}\left(\pi^2 n^2 + 2\pi i n - \frac{3}{8}\right)}}{2\pi i n + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}} +$$

$$+ \Omega_1 \ln\frac{r_2}{r_1}\operatorname{Im}\frac{-2\pi i n \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}\left(\pi^2 n^2 + 2\pi i n - \frac{3}{8}\right)}}{2\pi i n + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}}\sin \operatorname{Im}\omega_{x\pm n}t$$

$$\operatorname{Im}\omega_{x\pm n} = \Omega_1 \ln\frac{r_2}{r_1}\operatorname{Im}\frac{-2\pi i n \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}\left(\pi^2 n^2 + 2\pi i n - \frac{3}{8}\right)}}{2\pi i n + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}} \quad (1)$$

Частота колебаний в области полосок оказалась комплексной, т.е. колеблющейся вокруг среднего значения. При бесконечном квантовом числе и конечном отношении $\frac{r_2}{r_1}$ получается действительное решение, т.е. ламинарное классическое решение. В случае уменьшения расстояния между цилиндрами, т.е. уменьшение числа Рейнольдса, решение становится действительным классическим с одинаковой скоростью вращения внешнего и внутреннего цилиндра. Формула качественно описывает процессы при произвольных радиусах вращающихся поверхностей. Значительное увеличение отношения $\frac{r_2}{r_1}$ приводит к росту квантового числа n и потери зависимости от него, образуется хаотическое решение.

В книге [1] пишется о экспериментально обнаруженной предельной распространяющейся волны по внешней границе цилиндра с частотой, составляющей 1/3 частоты вращения внутреннего цилиндра. Для получения этой формулы надо ввести зависимость от продольной оси z, связав ее вращающимся углом φ. Уравнение определяющее зависимость от продольной координаты при условии $r_2 \to r_1$

$$-(r_2 - r_1)\omega \cos \omega t \frac{dg}{dz} + h \frac{d^2 g(\frac{z}{r_2 - r_1} - \sin \varphi)}{dz^2} = 0, g = const; g = g_0 \exp[(r_2 - r_1)\omega \cos(\omega t) \times$$
$$\times (\frac{z}{r_2 - r_1} - \sin \omega t)/(ar + b/r)], \omega = \delta\Omega_1$$

Определяется значение функции g, равное константе при малых числах Рейнольдса и бегущая волна по поверхности внешнего цилиндра при больших числах Рейнольдса

$$\frac{z}{r_2 - r_1} - \sin \delta\Omega_1 t = \frac{z}{r_2 - r_1} - \sin \delta u_1 t / r_1 = [\frac{z}{r_2 - r_1} - \sin \delta u_1 u_2 t / u_2 r_1] = [\frac{z}{r_2 - r_1} - \sin \Omega_2 t] = 0;$$
$$\delta = \Omega_2 / \Omega_1$$

причем как получено из эксперимента имеем стремление величины $\delta = \Omega_2 / \Omega_1 = 1/3$. Вместо предельной частоты распространяющейся волны получилась формула для определения частоты имеющая ясный физический смысл, угловая скорость вращения волны равна скорости вращения поверхности. Так рассматривается статическая картина поверхности, волна движется с угловой скоростью поверхности. Данная картина течения описывается Рис.1 в.

Если же внешний цилиндр вращать в противоположную сторону $\Omega_2 < 0$, то величина радиуса $r_{x\pm n}$ будет иметь противоположный знак и значит изменится знак $r(t), r_2$ и в формуле появится новый член

$$\omega_{x\pm n} = \Omega_1 + \Omega_1 \operatorname{Re}(\ln \frac{r_2}{r_1} \pm i\pi) \frac{-2\pi in \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}(\pi^2 n^2 + 2\pi in - \frac{3}{8})}}{2\pi in + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}} +$$

$$+ \Omega_1 \operatorname{Im}(\ln \frac{r_2}{r_1} \pm i\pi) \frac{-2\pi in \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}(\pi^2 n^2 + 2\pi in - \frac{3}{8})}}{2\pi in + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}} \sin \operatorname{Im} \omega_{x\pm n} t \qquad (1a)$$

$$\operatorname{Im} \omega_{x\pm n} = \Omega_1 \operatorname{Im}(\ln \frac{r_2}{r_1} \pm i\pi) \frac{-2\pi in \pm i\sqrt{4\pi^2 n^2 + \frac{3}{2}(\pi^2 n^2 + 2\pi in - \frac{3}{8})}}{2\pi in + \pi^2 n^2 - \frac{3}{8}}$$

этот член наряду с хаотическими колебаниями, определяемые целыми числами, определит и регулярные дополнительные колебания, зависящие от квантовых чисел, т.е. среднее значение радиуса, или действительная часть радиуса полоски, начнет смещаться, а значит и угол их положения начнет смещаться тоже. Образуются спиралевидно расположенные пластины с колебательным режимом. По мере роста отношения $\frac{r_2}{r_1}$, т.е. роста числа Рейнольдса, будет образовываться хаотический режим, так как квантовые числа растут, а значит зависимость от них пропадает, но мнимость решения остается. Данная картина течения описывает Рис.1 г.

Распределение давления имеет следующий вид

$$p(r)-p_1=\int_{r_1}^{r}\rho(\frac{c_2}{r}+c_1 r)^2 dr=\int_{r_1}^{r}\rho(c_1^2 r^2++2c_1c_2+\frac{c_2^2}{r^2})dr=\rho[c_1^2(r^3-r_1^3)/3++2c_1c_2(r-r_1)-\frac{c_2^2}{r}+\frac{c_2^2}{r_1}$$

Причем на поверхности тел имеем равномерное распределение давления, т.е. давление не создает толкающую силу. С ростом радиуса растет значение давления, так как средняя скорость вращения растет.

Список литературы

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. 7 Физика сплошных сред.
2. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Гидродинамика. -М.: Наука, 1980.-535с.
3. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2018, 66 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1538004822.pdf