Кинематика описания турбулентного потока с помощью комплексной скорости

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Комплексное турбулентное решение пересчитывается в действительное решение с помощью вычисления среднего значения, равного действительной части параметра потока и среднеквадратичного отклонения, равного амплитуде мнимой части параметра и синуса с переменной в общем случае частотой потока, умноженной на время. Частота потока определяется по переменной скорости потока. Если скорость потока константа, то ее надо делить на характерный размер системы, определяя частоту. Средних квадрат этого решения равен квадрату среднего значения - квадрату действительной части, плюс дисперсии, равной квадрату мнимой части комплексного числа. Средний квадрат равен квадрату модуля комплексного числа.

Надо отметить что комплексным может быть любое значение неизвестного, относительно которого составлено нелинейное уравнение в частных производных. В самом деле любое неизвестное при больших значениях параметра может колебаться, описывая турбулентное решение. Комплексное решение как вероятностная задача пересчитывается в действительное решение разными способами. При подсчете коэффициента сопротивления надо использовать средний квадрат величины и поэтому используется модуль комплексного числа. Докажем это.

Опишем физический смысл комплексного турбулентного решения. Итак, рассмотрим действительное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x_\alpha(t)$. Пусть начальные данные имеют среднее

x_α^0 и дисперсию $<[\Delta x_\alpha^0]^2>$(дисперсия начальных данных в случае уравнения Навье – Стокса определяется шероховатостью поверхности или не точно заданными начальными данными). Тогда для дисперсии решения имеем

$$<[\Delta x_l]^2>=<[x_l-<x_l>]^2>=<x_l^2>-2<x_l><x_l>+<x_l>^2=<x_l^2>-<x_l>^2.$$

Значит имеем

$$<x_l^2>=<x_l>^2+<[\Delta x_l]^2>=|<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}|^2 \qquad (1)$$

Приведу формулировку обратной теоремы Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел a,b и c, такой, что $a^2+b^2=c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Значит, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение образуют катеты, а гипотенузой является корень из среднего квадрата величины. Т.е величина среднего $<x_l>$ ортогональна среднеквадратическому отклонению $\sqrt{<[\Delta x_l]^2>}$, которое образует мнимую часть координаты тела. Таким образом, полученное в результате усреднения во времени декартово пространство с колебательной скоростью высокой частоты (период колебания меньше времени измерения) становится комплексным пространством. Т.е. в случае большой дисперсии величины действительного пространства, его нужно рассматривать как комплексное трехмерное пространство, где мнимая часть соответствует среднеквадратическому отклонению. При этом имеется следующая связь между переменными $\sqrt{<x_l^2>}=(<x_l>+i\sqrt{<[\Delta x_l]^2>})\alpha, |\alpha|=1$, причем комплексное число α выбирается из условия, чтобы мнимая часть имела положительное или отрицательное значение. Этому удовлетворяет среднеквадратичное отклонение. Но иногда среднеквадратичное отклонение положительно, например, в случае диэлектрической проницаемости, где вмешиваются положительные и отрицательные заряды. Тогда имеем формулу $\varepsilon=\varepsilon_0+\dfrac{4\pi i\sigma}{\omega}$, где действительная часть пропорциональна положительному среднеквадратичному отклонению диполя, а проводимость пропорциональна среднему значению. Но зато проводимость делится на частоту, которая имеет положительный и отрицательный знак.

При описании кинематики турбулентного потока надо использовать мгновенную скорость потока поэтому используется среднее значение числа Рейнольдса потока плюс мнимая часть координаты, умноженная на синус угловой скорости, умноженный на время, деленный корень из синуса суммы квадратов других проекций. Так как амплитуда и частота колебаний зависят от координат, получается много периодическая функция времени.

$$X_l(t, x_1^0, x_2^0) = \operatorname{Re} x_l(t, x_1^0, x_2^0) + \sqrt{2}\operatorname{Im} x_l(t, x_1^0, x_2^0) \times$$
$$\times \sin\{\int_0^t \Omega_l[\operatorname{Re} x_1(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_3(t, x_1^0, x_2^0)]dt + \varphi_l\} /$$
$$/\sqrt{\sum_{k=1}^{3} \sin^2\{\int_0^t \Omega_k[\operatorname{Re} x_l(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_2(t, x_1^0, x_2^0), \operatorname{Re} x_3(t, x_1^0, x_2^0)]dt + \varphi_k\};}.$$
$$\Omega_k(\mathbf{r}) = e_{kpq}[\frac{\partial \operatorname{Im} V_q(\mathbf{r})}{\partial x_p} - \frac{\partial \operatorname{Im} V_p(\mathbf{r})}{\partial x_q}]; \varphi_k \in [-\pi, \pi]$$

Эта формула приближенная, аргументами частоты является не среднее значение – действительная часть координаты, а сама координата с колебаниями. Это еще сильнее увеличит хаотический колебательный режим траекторий потока.

Задание углов $\varphi_k \in [-\pi, \pi]$ полностью определит возможное изменение картины турбулентного потока и является действительный непрерывным квантовым числом потока.

Множитель $\sqrt{2}$ введен для получения соответствия с первой формулой (1) для квадрата скорости потока. Получается эллиптическое изменение отношения координаты к мнимой координате. $\frac{[X_l(t, x_1^0, x_2^0) - \operatorname{Re} x_l(t, x_1^0, x_2^0)]^2}{2[\operatorname{Im} x_l(t, x_1^0, x_2^0)]^2} = 1$.

Координаты с верхним индексом, равным нулю являются действительными.

Действительная и мнимая часть траектории частиц определяется из уравнения

$$\frac{dx_k}{dt} = \mathrm{Re}\,V_k(\mathbf{r}) + i\,\mathrm{Im}\,V_k(\mathbf{r})\sin[\,\Omega_k(\mathbf{r})t + \varphi_k\,];\, x_k(t_0, x_1^0, x_2^0, L) = x_k^0$$

В двумерном случае имеем одну угловую скорость, перпендикулярную скорости вращения и траектория частиц потока будет определяться по формуле

$$X_1(t, x_1^0) = \mathrm{Re}\,x_1(t, x_1^0) + \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,x_1(t, x_1^0)\sin\{\int_0^t \Omega_3[\mathrm{Re}\,x_1(t, x_1^0), \mathrm{Re}\,x_2(t, x_1^0)]dt + \varphi_3\};$$

$$\Omega_3(\mathbf{r}) = e_{3pq}[\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,V_q(\mathbf{r})}{\partial x_p} - \frac{\partial\,\mathrm{Im}\,V_p(\mathbf{r})}{\partial x_q}]$$

$$X_2(t, x_1^0) = \mathrm{Re}\,x_2(t, x_1^0) + \mathrm{Im}\,x_2(t, x_1^0)\cos\{\int_0^t \Omega_3[\mathrm{Re}\,x_1(t, x_1^0), \mathrm{Re}\,x_2(t, x_1^0)]dt + \varphi_3\}$$

В одномерном случае комплексная координата определяется по формуле

$$X(t, x) = \mathrm{Re}\,x(t) + \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,x(t)\sin\{\int_0^t \frac{d\,\mathrm{Im}\,V[\mathrm{Re}\,x(t)]}{dx}dt + \varphi\};$$

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{Re}\,V(x) + i\,\mathrm{Im}\,V(x)\sin[\,\Omega(x)t + \varphi];\, x(t_0, L) = L; \Omega(x) = \frac{d\,\mathrm{Im}\,V(x)}{dx}$$

В случае если скорость не зависит от координат. нужно вычислить число Рейнольса и фазу определять по формуле $\varphi = \int_0^\tau \mathrm{Im}\,R(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\mathrm{Im}\,V}{a}dt, \tau = tv/a^2$, тогда плечо скорости вращения равно константе и частота соответствует мнимой части числа Рейнольдса.

Вместо координат потока турбулентное решение нелинейных уравнений в частных производных описывает температуру потока, его концентрацию и радиус потока в случае уравнения ОТО. При этом безразмерная частота равна безразмерной мнимой части параметра, например, одномерной температуры, умноженной на безразмерное время. Т.е. размерная частота равна безразмерной мнимой части параметра умноженной на величину частоты $\frac{\nu}{a^2}$.

Отмечу, что мнимая скорость в энергетическом уравнении гидродинамики описывает понижение температуры среды, а действительная скорость ее повышение. Это соответствует описанию эффекта Ранка для турбулентного потока. Мнимая концентрация описывает турбулентное колебание концентрации.

У нелинейного уравнения ОТО аналогом критического числа Рейнольдса является горизонт событий. При радиусе r, проведенном из центра тела, меньше гравитационного r_g наблюдается комплексное время $d\tau = \sqrt{1 - r_g / r}dt$ и комплексный радиус $d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1 - r_g / r}}$. Происходит переход к комплексному турбулентному режиму, описываемому вероятностным образом, с наличием среднего и дисперсии времени и координат. Решение для радиуса имеет вид

$$\rho = r_g + i\frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{r_g - r}} \cong r_g(1 - 2i\sqrt{1 - r / r_g}) \to$$
$$\to r_g[1 - 2\sqrt{1 - r / r_g}\sin(\frac{ct}{137 r_g} + \varphi)]; 3r_g / 4 < r < r_g; 3r_g > \rho > 0$$

Где мнимая часть означает колебание с амплитудой, равной мнимой части. Радиус черной дыры изменяется в пределах $r \in [3r_g / 4, r_g]$ и не равен нулю, т.е. сингулярность радиуса устраняется. Уравнение для радиуса имеет вид общий с решением гидродинамической задачи $R = R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T\alpha}$ как и решение задачи квантовой механики. В обоих случаях наблюдается двойной корень в критической точке.

Обобщением комптоновской частоты служит формула

$$\omega = \frac{1}{\frac{\hbar}{mc^2} + \frac{137Gm}{c^3}} = \frac{1}{\frac{\hbar}{mc^2} + \frac{137r_g}{c}}$$

При этом согласно исследователям Гвидо Ризолити (Guido Risaliti) и его коллегам из Гарвард-Смитсоновского центра астрофизики (Cfa) определили, что скорость вращения поверхности черной дыры составляет $0.8c$, где c скорость света см. [1].

Литература

1. G. Risaliti, F. A. Harrison, K. K. Madsen, D. J. Walton, S. E. Boggs, F.E.Christensen, W. W. Craig, B. W. Grefenstette, C. J. Hailey, E. Nardini, Daniel Stern & W. W. Zhang A rapidly spinning supermassive black hole at the centre of NGC 1365. *Nature* **494**, 449–451 (28 February 2013) doi:10.1038/nature11938
2.