

Расчет потока в цилиндрическом трубопроводе с переменным сечением

в ламинарном и турбулентном комплексном режиме

Е.Г. Якубовский

e – mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

В случае переменного сечения трубопровода наряду с продольной скоростью возникает радиальная компонента скорости. Она пропорциональна производной от радиуса сечения по продольной координате. В случае постоянного радиуса трубопровода радиальная скорость равна нулю. Задача решена в случае течения жидкости в ламинарном и комплексном турбулентном режиме внутри двух переменных радиусов трубопровода, внешнего и внутреннего.

Расчет трубопровода с переменным цилиндрическим сечением

в случае несжимаемой жидкости

Реализацией данного алгоритма решение является расчет трубопровода с произвольным сечением. Решение задачи о трубопроводе с произвольным сечением, будем искать в виде

$$V_z = V_0(t) \left[1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} \right] \left[1 - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} \right] = V_0(t) \left[1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)} \right], r \in [b(z), a(z)] \quad \text{в}$$

цилиндрической системе координат. Так как внешнее воздействие имеется

только для продольной оси $P(z) = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{L} \int_0^z \frac{S(0)}{S(z)} dz$, где P_2, P_1 давление в

начальной и конечной части трубопровода, величина L это длина

трубопровода. Внешнее воздействие равно $h_z = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{S(0)}{S(z)}$. Согласно формуле

градиент давления равен $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{S(0)}{S(z)}$. Получим уравнение

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} = -\frac{P_1 - P_2}{L} \frac{a^2(0) - b^2(0)}{a^2(z) - b^2(z)} + \nu \Delta V_z.$$

Определим величину $V_r(r, z)$ из уравнения неразрывности при условии

$$V_z(r, z) = V_0(t) \left[1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)} \right]$$

Уравнение неразрывности имеет вид $\frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$, откуда имеем

$$V_r(r, z, t) = -V_0(t) \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a(z, \varphi)}{2 \partial z} + \frac{2b}{r} \frac{\partial b}{\partial z} \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 dr - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right] \right\}$$
 при

условии $b = 0$ эта формула сводится к цилиндрической

Подставляем значение скорости, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial t} A(z, r, \varphi) + 2V_0^2 \left[-\frac{D(z, r, \varphi)}{R_{cr}} + B(z, r, \varphi) + 2V_0 \omega_z \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi} \right] &= -\frac{(P_1 - P_2)[a^2(0) - b^2(0)]}{\rho L} - \\ &- \nu V_0 C(z, r, \varphi); A(z, r, \varphi) = 1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}; \\ B(z, r, \varphi) &= \left[1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)} \right] \left[\frac{2r^2}{a^3(z, \varphi)} \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{2b}{r^2} \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b^2}{a^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{2r^4}{a^5(z, \varphi)} \frac{\partial a}{2 \partial z} + \frac{4b}{a^2} \frac{\partial b}{\partial z} \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 dr + \frac{2b^2}{a^3} \frac{\partial a}{2 \partial z} + \frac{2b^3}{r^4} \frac{\partial b}{\partial z} \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 - \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \left(\frac{2r}{a^2} + \frac{2b^2}{r^3} \right) \\ D(z, r, \varphi) &= \left[1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)} \right] \left[\frac{r^2}{a^3(z, \varphi)} + \frac{2b}{r^2} + \frac{3r^3}{2a^4(z, \varphi)} \right] \\ C(z, r, \varphi) &= \frac{4}{a^2(z, \varphi)} + 6 \frac{b^2(z, \varphi)}{r^4} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \left[\frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} + \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} - \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)} \right] \end{aligned}$$

Умножаем это уравнение на радиус и интегрируем это уравнение по радиусу и углу, Так как система координат цилиндрическая, формула при условии $b = 0$ переходит с помощью предельного перехода в стандартную с использованием только радиуса трубопровода a , но содержит деление на ноль, которое надо регуляризовать. Введение внутреннего радиуса b позволит описать нулевую скорость в конце системы, при условии $a(L, \varphi) = b(L, \varphi) = r(\varphi)$. Это может

происходить в конце продольной координаты трубопровода.

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} A(z)/4 + \frac{(P_1 - P_2)[a^2(0) - b^2(0)]}{2\rho L} S(z) + [2\nu C(z) + \omega_z a^2(z) \frac{\partial \ln a}{2\partial \varphi}] V_0 S(z) = V_0^2 [\frac{D(z)}{R_{cr}} - B(z)]$$

$$A(z) = 1 - \frac{a^4 - b^4}{4a^2} - \frac{b}{6} \ln \frac{a}{b + \varepsilon} + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - b^2)/2;$$

$$B(z) = 2 \left\{ \frac{(a^2 + b^2)(a + b)}{4a^3} - \frac{(a + b)(a^4 + a^2 b^2 + b^4)}{6a^5} - \frac{b^2(a + b)}{a^3} + \frac{b^2}{4a^5} (a^2 + b^2)(a + b) + \right. \\ \left. + \frac{2b}{a - b + \varepsilon} \ln \frac{a + \varepsilon}{b + \varepsilon} \frac{\partial b}{\partial z} - (a + b) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b^2}{a^2} \right) / 2 - [b^2(a + b) - \frac{b^2(a^2 + b^2)(a + b)}{a^2}] \frac{1}{a^3} \frac{\partial a}{\partial z} + \right. \\ \left. + [2b^3 \left(\frac{a + b}{a^2(b + \varepsilon)^2} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{b^2}{a^2} \frac{2b}{a - b + \varepsilon} \frac{\partial b}{\partial z} \ln \frac{a + \varepsilon}{b + \varepsilon} + \left[-\frac{b^2}{a - b + \varepsilon} \ln \frac{a + \varepsilon}{b + \varepsilon} + \frac{b^2}{a^2} (a + b) \right] \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b^2}{2a^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(a + b)(a^4 + a^2 b^2 + b^4)}{6a^5(z, \varphi)} \frac{\partial a}{2\partial z} + \frac{2b(a + b)}{a^2} \frac{\partial b}{\partial z} \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 dr + \frac{b^2(a + b)}{a^3} \frac{\partial a}{2\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + b^3 \left[\frac{1}{(a + \varepsilon)^2} - \frac{1}{(b + \varepsilon)^2} \right] \frac{\partial b}{\partial z} \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 dr - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{(a^2 + b^2)(a + b) - 2b^2(a + b)}{8a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b^2}{a^2(a - b)} \int_{b + \varepsilon}^{a + \varepsilon} \ln \frac{r}{b + \varepsilon} dr + \frac{b^2}{2} \frac{1}{a(b + \varepsilon)} + b^4 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3a^3(b + \varepsilon)^3} \right] + \frac{1}{a - b + \varepsilon} \int_{b + \varepsilon}^{a + \varepsilon} \frac{\ln r / (b + \varepsilon)}{r^4} dr \right] \right\} .$$

$$D(z) = 2 \left\{ [(a^2 + b^2)(a + b)/4 - \frac{(a + b)(a^4 + a^2 b^2 + b^4)}{6a^2} - b^2(a + b) + \frac{b^2}{4a^2} (a^2 + b^2)(a + b)] \frac{1}{a^3} + \right. \\ \left. + [b^2(a + b) + \frac{b^2(a^2 + b^2)(a + b)}{a^2}] \frac{1}{a^3} - 2b^3 \frac{a + b}{a^2(b + \varepsilon)^2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{2b}{a - b + \varepsilon} \ln \frac{a + \varepsilon}{b + \varepsilon} \right. \\ \left. + \frac{2b}{a - b} \ln \frac{a + \varepsilon}{b + \varepsilon} + \frac{(a + b)(a^4 + a^2 b^2 + b^4)}{12a^5(z, \varphi)} + \frac{2b(a + b)}{a^2} \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 dr + \frac{b^2(a + b)}{2a^3} + \right. \\ \left. + b^3 \left[\frac{1}{(a + \varepsilon)^2} - \frac{1}{(b + \varepsilon)^2} \right] \int_b^r \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b + \varepsilon} \right)^2 dr \right\}$$

$$C(z) = \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2} - 3b^2 \left[\frac{1}{(a + \varepsilon)^2} - \frac{1}{(b + \varepsilon)^2} \right] - (a^4 - b^4) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{a^2} + \ln \frac{a}{b + \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} b^2 - (a^2 - b^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{b^2}{2a^2} + \\ + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{2a^2} - \left[\frac{1}{(a + \varepsilon)^2} - \frac{1}{(b + \varepsilon)^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{b^2}{2} - \ln \frac{a + \varepsilon}{b + \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{b^2}{2a^2}]$$

$$\begin{aligned}
\int_{b+\varepsilon}^{a+\varepsilon} \ln \frac{r}{b+\varepsilon} dr &= r[\ln r/(b+\varepsilon) - 1] \Big|_b^a = a \ln \frac{a+\varepsilon}{b+\varepsilon} - b + a; \int_{b+\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\ln \frac{r}{b+\varepsilon}}{r^4} dr = -\frac{\ln r/(b+\varepsilon) + 1}{3r^3} \Big|_{b+\varepsilon}^a = \\
&= -\frac{\ln \frac{a+\varepsilon}{b+\varepsilon}}{3a^3} - \frac{1}{3(a+\varepsilon)^3} + \frac{1}{3(b+\varepsilon)^3}; \int_{b+\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{r} \left(\ln \frac{r}{b+\varepsilon}\right)^2 dr = \frac{\left(\ln \frac{a+\varepsilon}{b+\varepsilon}\right)^3}{3} \\
S(z, \varphi) &= \frac{a(0, \varphi) - b(0, \varphi)}{a(z, \varphi) - b(z, \varphi) + \varepsilon}
\end{aligned}$$

Для получения счетного количества решений, умножаем это уравнение на функцию $r(1 - r^2/a^2)^n$ и интегрируем по пространству. Получаем счетное количество турбулентных решений, как для гладкой, так и шероховатой поверхности. При этом, как и у уравнения Шредингера получается счетное количество турбулентных решений, каждое со своей собственной энергией. При переходе из одного состояния в другое излучается дискретная энергия. Минимум собственной энергии определяет выбор решения.

Беря модуль правой части, и находя средний модуль тангенса угла отклонения, получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} A^2(z)/4 + \frac{(P_1 - P_2)[a^2(0) - b^2(0)]}{2\rho L} S(z) + 2\nu V_0 C(z)S(z) = -V_0^2 \left[-\frac{D(z)k}{l} + B(z) \right] \quad (1)$$

В случае выбора знака минус у значения среднего модуля тангенса угла отклонения $\langle |da/dz| \rangle$, получится, что шероховатости увеличивают скорость потока, так как полная производная $\frac{dV_0}{dt}$ увеличится, что неправильно, скорость потока должна уменьшаться за счет шероховатостей.

При ведении турбулентной вязкости используется отрицательный знак у средней скорости, связанной с корреляционной функцией скорости процесса

$$-\rho \langle u'_i u'_\alpha \rangle = \rho K \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_\alpha} \text{ см. [1], что приводит к знаку плюс у среднего по}$$

модулю тангенса наклона шероховатости. Уравнение движения с учетом возмущения имеет вид

$$\frac{\partial \langle \rho u_l \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho \langle u_l \rangle \langle u_\alpha \rangle + \rho \langle u'_l u'_\alpha \rangle) = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_l} + \rho \nu \langle \Delta u_l \rangle$$

Т.е. конвективный член нужно брать с учетом минуса, причем правую часть (1) брать со знаком плюс. Кроме того, надо выбирать знак плюс у среднего тангенса модуля наклона шероховатости, чтобы получилось комплексное турбулентное решение. В противном случае, решение, описывающее пульсирующий турбулентный режим не получится и решение будет не устойчивое.

Переходя от радиуса к диаметру трубопровода и разделив на величину $\nu^2 k / (dl)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dR_0}{d\tau} A(z) R_{cr} / 4 = R_0^2 [D(z) - B(z) R_{cr}] - 2R_0 R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2(z)}{2\nu} \frac{\partial \ln a(z)}{\partial \varphi}] S(z) + \frac{T}{8} S(z); \\ T = \frac{(P_2 - P_1) d^3 R_{cr}}{\rho \nu^2 L}; \tau = 16t \cdot \nu / (R_{cr} d^2), R_0 = V_0 d / \nu, a(z) = \int_0^{2\pi} a(z, \varphi) d\varphi / 2\pi; \end{aligned} \quad (2)$$

$$d^2 = 4[a^2(0) - b^2(0)]; \frac{\partial \ln a(z)}{\partial \varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \ln a(z, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}; 1/R_{cr} = \langle |da/dz| \rangle / 6 = k/l = \langle |\tan \varphi| \rangle$$

Где величина ν это значение кинематической вязкости, $d^2 = 4[a^2(0) - b^2(0)]$ начальный диаметр сопла, V_0 определяемая скорость потока, R_{cr} критическое число Рейнольдса, для трубопровода с постоянным сечением, определяет число Рейнольдса перехода к турбулентному режиму, k/l определяет средний модуль тангенса наклона высоты шероховатости. Если же использовать другую ветвь квадратного корня из дисперсии, то получим не устойчивое решение и уравнение

$$\frac{dR_0}{d\tau} = -R_0^2 [D(z) + C(z) R_{cr}] - 2R_0 R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) + \frac{TS(z)}{8}.$$

Тогда стационарное решение при большом перепаде давления имеет вид

$$R_0 = \frac{-R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) + \sqrt{R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z) + TS(z)[D(z) + B(z)R_{cr}]/8}}{D(z) + B(z)R_{cr}}.$$

Ламинарное решение этих двух уравнений общее. В турбулентном режиме при больших давлениях имеет линейную зависимость числа Рейнольдса от корня из давления. По мере увеличения давления растет и значение числа Рейнольдса, что увеличивает давление. Т.е. решение не устойчиво. В случае комплексного решения оно равно

$$R_0 = \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) - i \sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z)/8 - R_{cr}^2 S^2(z) [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2}}{D(z) - B(z)R_{cr}}.$$

При этом с ростом давления растет мнимая часть скорости, что не приводит к росту действительного давления.

Если микро-шероховатости $\langle |\tan \varphi| \rangle$ распределены по всей поверхности трубопровода, они находятся и на макро-шероховатостях и определяют критическое число Рейнольдса и коэффициент сопротивления при числе Рейнольдса, равном 2300. Микро-шероховатости имеют молекулярную природу и определяются средним размером атома, равным среднему геометрическому между размером ядра r_A , и размером орбиты Бора $\sigma = \sqrt{r_A a_0}$, при расстоянии между атомами $a = 3.043A$, равному некоторой величине, определяемой свойствами границы трубопровода, железом, титаном и углеродом. Расстояние между атомами железа $a_{Fe} = 2.87A$, между атомами титана $a_{Ti} = 3.46A$, между атомами углерода $a_C = 3.567A$ см. [2]. При этом абсолютная величина тангенса наклона высоты микро-шероховатости поверхности металла в трубопроводе определяется по формуле

$h(z) = \langle |\tan \varphi| \rangle = \sum_{n=-N}^N \exp[-(z - na)^2 / 2\sigma^2] / (2N\sqrt{2\pi})$. Средний тангенс наклона равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{cr}} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{dz}{2Na} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z-na)^2 / 2\sigma^2] dz}{2\sqrt{2\pi}a} = \frac{\sigma}{2a} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{r_A}{a_0}} = \frac{1}{2 \cdot 6.086} \sqrt{\frac{1.4 \cdot 10^{-13}}{0.5 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2300} \end{aligned}$$

Величина критического числа Рейнольдса относительно диаметра равна $R_{cr} = 2300$. Но почему критическое число Рейнольдса для сферы равно $3 \cdot 10^5$. Это связано с разным определением критического числа Рейнольдса. Оно равно

$$\frac{1}{R_{cr}} = \frac{da}{ds} = \frac{dl_{eff}}{ds} \cdot \frac{a}{l_{eff}} = \frac{1}{2300} \cdot \frac{a}{l_{eff}}, \quad \text{где величина } l_{eff} \text{ эффективный,}$$

гидродинамический размер тела, включая среду, a истинный геометрический размер тела, причем $\frac{dl_{eff}}{ds} = |\tan \varphi| = \frac{1}{2300}$ молекулярный тангенс наклона

шероховатости. Причем отношение $\frac{a}{l_{eff}}$ может иметь значение $\frac{a}{l_{eff}} = 0.01$.

Необходимо отметить, что к микро-шероховатостям относятся и ступенчатое изменение высоты поверхности. Его тангенс наклона образует дельта функцию и при усреднении дает вклад в критическое число Рейнольдса в данном сечении

$$\frac{2}{R_{cr}} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^P \frac{|\Delta a_k|}{Pa} \delta(z - z_k) dz = \sum_{k=1}^P \frac{|\Delta a_k|}{Pa}, \quad \text{где скачок высоты произошел на}$$

разных углах данного сечения.

Величина критического числа Рейнольдса равна $R_{cr} = 2300$. Макро-шероховатости $\langle |da/dz| \rangle$ более редкие и определяют коэффициент сопротивления на числах Рейнольдса в 12 и более раз больше.

Получаем условие стационарности для уравнения Навье – Стокса с учетом одного члена ряда-решения в одномерном случае

$$R_0^2 [D(z) - B(z)R_{cr}] - 2R_0 R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] + T/8 = 0,$$

В одномерном случае при постоянстве сечения трубопровода уравнение неразрывности выполняется тождественно. Ламинарное решение этого уравнения равно

$$R_0 = \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] - \sqrt{R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 - T[D(z) - B(z)R_{cr}]/8}}{D(z) - B(z)R_{cr}}.$$

При внешнем давлении, равном

$$T = T_{cr} = 8R_{cr}^2 [C(z) - \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 / [D(z) - B(z)R_{cr}]$$

начинается комплексное решение и турбулентный режим, так как число Рейнольдса в этой точке равно критическому значению. Из эксперимента и путем проделанного вычисления имеем значение критического числа Рейнольдса для круглого трубопровода

$$R_{cr} = \frac{l}{k} = \frac{1}{\langle |\tan \varphi| \rangle} = 2300.$$

Коэффициент сопротивления трубопровода с круглым сечением определяется по формуле (в формулу подставляем перепад давления, выраженный через безразмерное давление)

$$\lambda = \frac{2\Delta P_L d}{\rho V_a^2 L} = \frac{2T\nu^2 k}{V_a^2 d^2 l} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|},$$

Средняя скорость, входящая в число Рейнольдса, равна

$$V_a = \int_0^a r V_0 (1 - \frac{r^2}{a^2}) dr / \int_0^a r dr = V_0 / 2, R_a = \frac{V_a d}{\nu} = \frac{R_0}{2}.$$

Асимптотика коэффициента сопротивления трубопровода λ_{lam} с круговым сечением для ламинарного режима вычислена верно.

$$R_a = R_0 / 2 = \frac{R_{cr} - \sqrt{R_{cr}^2 - T[D(z) - B(z)R_{cr}]/8}}{D(z) - B(z)R_{cr}} / 2 \cong \frac{T}{32R_{cr}}, \frac{T}{8R_{cr}^2} \ll 1, \lambda_{lam} = \frac{2T}{R_{cr} |R_a^2|} = \frac{64}{|R_a|}$$

Асимптотика получена при малом числе Рейнольдса, когда конвективный член мал.

В результате имеем следующую регуляризованную формулу для продольной и радиальной скорости. Ламинарный режим продольной скорости описывается

формулой

$$\begin{aligned}
 V_z &= \frac{\nu}{d} \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) - \sqrt{R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z) - T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z)/8}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \times \\
 &\times [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}] = \frac{\nu T}{d 16} [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}] / [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu^2} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]; \\
 (\text{rot} \mathbf{V})_z &= \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{r \partial \varphi} = 2\omega_z = \\
 &= \omega_z - \frac{\nu}{a^2} \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) - \sqrt{R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z) - TS(z)[D(z) - B(z)R_{cr}]/8}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \lambda \\
 \lambda &= \frac{r^2}{a(z, \varphi)d} \left[\frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial z} \frac{\partial a(z, \varphi)}{a \partial \varphi} - \frac{\partial^2 a(z, \varphi)}{\partial z \partial \varphi} \right] - \left[\frac{2b(z, \varphi)a(z, \varphi)}{r^2} \frac{\partial b(z, \varphi)}{r \partial \varphi} - \frac{a(z, \varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{b}{a} \right) \right] \frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial z} \\
 \frac{\omega_z a^2}{\nu} &= \int_0^{2\pi} \frac{\lambda [R_{cr} \lambda - \sqrt{R_{cr}^2 \lambda^2 - T[D(z) - B(z)R_{cr}]/8}]}{D(z) - B(z)R_{cr} - \lambda \frac{\partial \ln a}{2 \partial \varphi} R_{cr}} d\varphi / 2\pi
 \end{aligned}$$

Формулу надо регуляризовать. Но предельный переход без регуляризации определит правильную формулу ламинарного режима при малом безразмерном давлении T или при нулевом знаменателе без учета критического числа Рейнольдса. Но нулевой знаменатель надо регуляризовать.

В случае турбулентного режима, знаменатель не нулевой и регуляризация не нужна. Действительный член описывает среднее значение, а мнимый член колебание с амплитудой, равной мнимой части, и частотой, равной ротору скорости.

$$\begin{aligned}
V_z &= \frac{v}{d} \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) - i \sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z)}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \times \\
&\quad \times [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}] \\
\operatorname{Re} V_z &= \frac{v}{d} \frac{R_{cr} (1 + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}) S(z)}{1 - \frac{\partial a}{\partial z} R_{cr}} [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}] + \\
&+ \frac{v}{d} \frac{\sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z)} \beta}{D(z) - B(z)R_{cr}} [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}] \times \\
&\quad \times \sin(\Omega_z t + \varphi) \sin(\omega_z t + \psi); \\
\Omega_z &= \frac{v}{ad} \frac{\sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z)} \beta}{D(z) - B(z)R_{cr}} [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}]
\end{aligned}$$

Где величина Ω_z связана с колебанием вдоль продольной координаты. Величина ω_z связана с вращением вокруг оси z с безразмерной амплитудой

$$\frac{\sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z)} \beta}{D(z) - B(z)R_{cr}} [1 - \frac{r^2}{a^2(z, \varphi)} - \frac{b^2(z, \varphi)}{r^2} + \frac{b^2(z, \varphi)}{a^2(z, \varphi)}]$$

Из нелинейного уравнения определится скорость вращения с осью, совпадающей с осью цилиндра, определим параметр $\frac{\omega_z a^2}{\nu}$ входящий в формулы

для скорости потока

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \mathbf{V})_z &= \frac{\partial \operatorname{Im} V_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \operatorname{Im} V_r}{r \partial \varphi} = 2\omega_z = \omega_z - \left\{ \frac{3r^3 \nu}{a^4(z, \varphi) d} \left[\frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial z} \frac{\partial a(z, \varphi)}{a \partial \varphi} - \frac{\partial^2 a(z, \varphi)}{\partial z \partial \varphi} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^3 \nu}{a^3(z, \varphi) d} \left[\frac{2b(z, \varphi)}{r^2} \frac{\partial b(z, \varphi)}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{b}{a} \right) \right] \frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial z} \right\} \times \\
&\quad \times \frac{\sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 S^2(z)} \beta}{D(z) - B(z)R_{cr}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_z(z)a^2}{\nu} &= \frac{\lambda}{D(z) - B(z)R_{cr}} \left\{ \frac{\lambda \partial \ln a / \partial \varphi}{2[D(z) - B(z)R_{cr}]} - \right. \\ &- \sqrt{\left[\frac{\lambda \partial \ln a / \partial \varphi}{2(D(z) - B(z)R_{cr})} \right]^2 + T[D(z) - B(z)R_{cr}]S(z)/8 - R_{cr}^2 S(z)} \left. \right\} \\ \lambda(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{3r^3}{a^2(z, \varphi)d} \left\{ \left[\frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial z} \frac{\partial a(z, \varphi)}{a \partial \varphi} - \frac{\partial^2 a(z, \varphi)}{\partial z \partial \varphi} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{r^3}{a(z, \varphi)d} \left[\frac{2b(z, \varphi)}{r^2} \frac{\partial b(z, \varphi)}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{b}{a} \right) \right] \frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial z} \right] \right\} S(z) \frac{d\varphi}{2\pi} \beta \end{aligned}$$

Частоты колебаний оказалась отрицательной, это значит направление оси колебаний противоположно продольной координате. Эта формула при радиусе, не зависящем от угловой координаты определяет нулевую скорость вращения. Но вращение вокруг центральной оси происходит только в турбулентном режиме.

Отмечу, увеличение радиуса трубопровода с ростом продольной координаты приводит к уменьшению безразмерного давления, следовательно, комплексное решение наступит позже, значит увеличение радиуса способствует переходу в ламинарный режим, уменьшение радиуса увеличивает безразмерное давление, значит способствует переходу в турбулентный режим.

Ламинарное решение этого уравнения

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{\nu}{d} \frac{R_{cr} \left[C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi} \right] S(z) - \sqrt{R_{cr}^2 \left[C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi} \right]^2 S^2(z) - TS(z)[D(z) - B(z)R_{cr}]/8}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \times \\ &\times \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a(z)}{\partial z} - 2b \frac{\partial b}{\partial z} \left(\ln \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \right\} \\ (\text{rot} \mathbf{V})_r &= \frac{\partial V_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 2\omega_r = \\ &= \frac{R_{cr} \left[C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi} \right] S(z) - \sqrt{R_{cr}^2 \left[C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi} \right]^2 S^2(z) - TS(z)[D(z) - B(z)R_{cr}]/8}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \times \\ &\times \left[\frac{2r\nu}{a^3(z, \varphi)d} \frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{2b\nu}{r^3 d} \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{b^2}{a^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Где надо использовать продольную частоту ω_z ламинарного режима.

Совершенно аналогично строится радиальная компонента турбулентного, комплексного решения, только ротор скорости имеет другой вид

$$\begin{aligned}
 V_r &= -\frac{\nu}{d} \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z) - i \sqrt{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 S^2(z) [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a(z)}{\partial z} - 2b \frac{\partial b}{\partial z} \left(\ln \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \right\} \\
 \operatorname{Re} V_r &= -\frac{\nu}{d} \frac{R_{cr} [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}] S(z)}{D(z) - B(z)R_{cr}} \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a}{\partial z} - 2b \frac{\partial b}{\partial z} \left(\ln \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{\nu}{d} \frac{i \sqrt{TS(z) [D(z) - B(z)R_{cr}] / 8 - R_{cr}^2 S^2(z) [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2}}{D(z) - B(z)R_{cr}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a}{\partial z} - 2b \frac{\partial b}{\partial z} \left(\ln \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \right\} \sin(\Omega_r t + \varphi) \sin(\omega_r t + \psi) \\
 \Omega_r &= -\frac{\nu}{ad} \sqrt{\frac{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 S^2(z) [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2}{D(z) - B(z)R_{cr}}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a}{\partial z} - 2b \frac{\partial b}{\partial z} \left(\ln \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \right\} \\
 (\operatorname{rot} \mathbf{V})_r &= \frac{\partial \operatorname{Im} V_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \operatorname{Im} V_\varphi}{\partial z} = 2\omega_r = \sqrt{\frac{T[D(z) - B(z)R_{cr}] S(z) / 8 - R_{cr}^2 S^2(z) [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2 \beta}{D(z) - B(z)R_{cr}}} \times \\
 &\quad \times \frac{2r\nu}{a^3(z, \varphi) d} \frac{\partial a(z, \varphi)}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Где величина Ω_r связана с колебанием вдоль радиуса. Величина ω_r связана с вращением вокруг радиуса с безразмерной амплитудой

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{\frac{TS(z) [D(z) - B(z)R_{cr}] / 8 - R_{cr}^2 S^2(z) [C(z) + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}]^2}{D(z) - B(z)R_{cr}}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{r^3}{a^3(z)} \frac{\partial a}{\partial z} - 2b \frac{\partial b}{\partial z} \left(\ln \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{r^2 - b^2}{2} - b^2 \ln \frac{r}{b} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Скорости вращения связаны с не постоянством сечения цилиндра. Надо

использовать продольную частоту ω_z , связанную с турбулентным режимом.

При постоянном среднем модуле тангенса угла наклона шероховатостей $\frac{k}{l}$, но разной высоте шероховатостей k , получается график отличный от экспериментального графика Никурадзе, на который я ориентировался, долго не мог получить, и наконец введя зависимость «песочной шероховатости» от безразмерного давления получил совпадение с графиком Никурадзе.

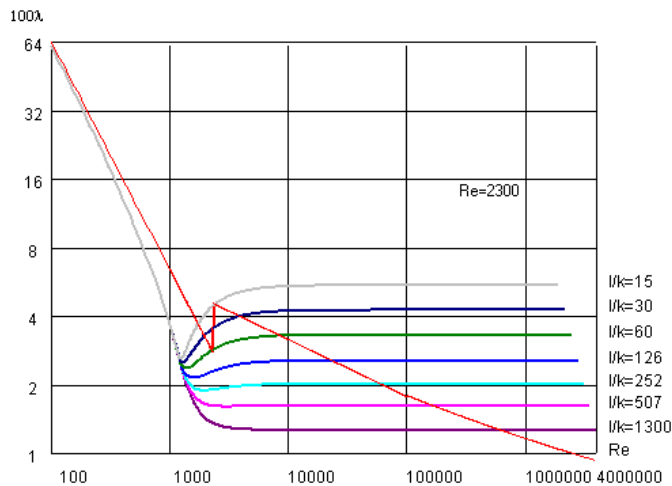


Рис.1 График зависимости коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разных среднеквадратичных тангенсах наклона шероховатости

Но формула Никурадзе получена при постоянном отношении радиуса трубопровода $a(z)$ к средней высоте шероховатости k , т.е. «песочной шероховатости». Но как учесть степень шероховатости, которая зависит от числа Рейнольдса потока. Имеем уравнение

$$\beta = x^{3/8} = \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} \alpha + \frac{1-\alpha}{x^{3/8}} \left[\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right]^{3/4}$$

$$\alpha = \exp\{-4 \left| \sqrt[4]{T} - \sqrt[4]{T_{cr}} \right| \sqrt{k / [a(z) T_{cr}]}\}$$

$$x^{3/4} - \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} x^{3/8} \alpha - (1-\alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right)^{3/4} = 0$$

Причем в случае переменного сечения нужно ввести переменный радиус сопла.

Из этого квадратного уравнения определим x

$$x^{3/8} = \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1 - \alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right)^{3/4}}$$

Откуда имеем значение коэффициента β

$$\beta = \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1 - \alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right)^{3/4}} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right)^{3/8}, \alpha = 0, R \gg R_{cr} \\ \left(\frac{1.6}{R_{cr} + 0.8}\right)^{3/8}, \alpha = 1, R = R_{cr} \end{cases} \quad (3)$$

При этом коэффициент сопротивления потока в круглом трубопроводе

определяется по формуле $\lambda = \frac{2T}{R_{cr} |R_a|^2}$, число Рейнольдса, вычисленное на

основании средней скорости течения потока, равно $R_a = R_0 / 2$. Коэффициент сопротивления на бесконечности числа Рейнольдса пропорционален

$\lambda = \frac{16\sqrt{2}}{R_{cr} \left[\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right]^\sigma}$. Приведем график решения, полученного с помощью

одного члена ряда.

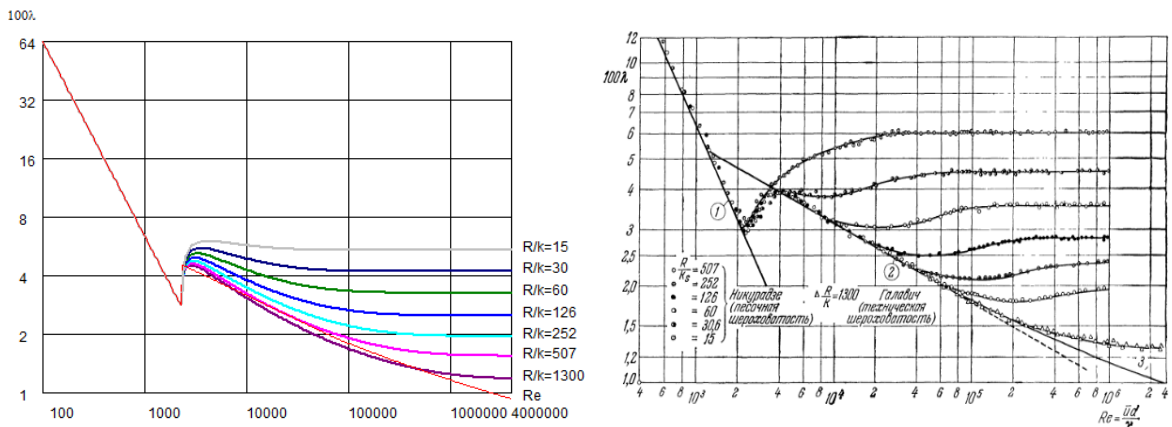


Рис.2 Теоретическая и экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления круглого трубопровода от числа Рейнольдса при разной степени шероховатости

Для сравнения теоретического и экспериментального графика зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса потока приведен экспериментальный график Никурадзе справа на рис.2. Ошибка теоретического графика относительно экспериментального примерно 10%. Отмечу, что график, приведенный на рисунке Никурадзе в ламинарной части решения точен, так как правая часть (1) имеет в ламинарном режиме положительное и отрицательное значение, и формула $\lambda = 64/R$ выполняется точно для трубопровода с постоянным сечением.

Для вычисления скорости потока в случае турбулентного режима необходимо умножить мнимую часть потока на величину, учитывающую шероховатость сопла

$$\beta = \left(\frac{2}{R_{cr}}\right)^{3/8} \alpha / 2 + \sqrt{\left(\frac{2}{R_{cr}}\right)^{3/4} \alpha^2 / 4 + (1-\alpha) \left(\frac{1.6}{R_{cr} k / a(z) + 0.8}\right)^{3/4}} \quad (4)$$

$$\alpha = \exp\{-4 | \sqrt[4]{T} - \sqrt[4]{T_{cr}} | \sqrt{k / [a(z) T_{cr}]}\}; T_{cr} = 8R_{cr}^2 \left(1 + \frac{\omega_z a^2}{2\nu} \frac{\partial \ln a}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{a(0)}{a(z)} / \left(1 - \frac{da}{dz} R_{cr}\right)$$

Список литературы

1. А.С. Монин, А.М. Яглом Статистическая гидромеханика Механика турбулентности Часть 1. М.: «Наука», 1965, -640с.
2. Ч. Киттель Введение в физику твердого тела, М.: «Наука», 1978, с. 789