

## Детерминированные законы микро и макромира

### Оглавление

|  |    |
|--|----|
| 1. Получение уравнения, описывающего классическое и квантовое излучение.....                             | 3  |
| 2. Связь уравнения Шредингера и Навье-Стокса.....  | 4  |
| 3. Связь уравнения ОТО, уравнения Навье-Стокса и уравнения Шредингера.....                               | 9  |
| 4. Формула для вычисления энергии ядра и многоэлектронного атома с помощью квантового уравнения ОТО..... | 21 |
| 5. Детерминированная редукция микромира или новые идеи в квантовой механике.....                         | 42 |
| 6. Использование полиномов Лежандра нецелого порядка для описания детерминированного спина частицы.....  | 48 |
| 7. Литература.....   | 53 |

## Аннотация

Ставится задача единым образом описать квантовые и классические законы. Имеется общий механизм, описывающий все эти законы, основой функционирования всех законов являются свойства частиц вакуума. Как элементарные частицы объяснили поведение макромира, так и частицы вакуума объясняют поведение элементарных частиц. Электромагнитные, гравитационные и звуковые волны описаны едиными уравнениями – уравнениями Максвелла с едиными зарядами, определяемыми массами элементарных частиц. Без общей основы – свойств частиц вакуума, это бы не произошло. Для доказательства этого факта запишем уравнение, описывающие квантовое и классическое поведение электромагнитного поля. Связанные уравнения и решения описывающие квантовое решение уравнения Шредингера и детерминированное решение уравнения Навье-Стокса в комплексном пространстве. Связь уравнения ОТО, уравнения Навье-Стокса и уравнения Шредингера. Все эти уравнения образуют связанное решение. Но все эти связанные уравнения имеют детерминированную часть в комплексном пространстве. Поэтому возникает идея о другой интерпретации волновой функции, как о детерминированном потенциале уравнения Навье-Стокса, а не как определяющем вероятность событий. Для этого построена волновая функция, зависящая от времени и начальных условий, и в определенный момент времени ее модуль совпадает с модулем стационарной волновой функции и ее постоянной энергии и в этот момент происходит изменение макро-свойств системы. Но это надо делать в комплексном пространстве. Соотношение неопределенности определяет максимальное значение мнимой части, так как мнимая часть описывает среднеквадратичное отклонение действительной части.

### **1. Получение уравнения, описывающего классическое и квантовое излучение**

Волновое уравнение описывает движение частиц вакуума, описывающее поведение фотона. При этом даже в вакууме необходима среда, определяющая массовую скорость электромагнитной волны при скорости возмущения, равной скорости света. Эта среда является частицами вакуума, описанная в [1]. Но основное волновое уравнение надо записывать в безразмерном виде

$$\sum_{p=1}^3 \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^{p^2}} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^{0^2}} = -4\pi\rho_e u_k (1 + A_k); A_k = \frac{dA_k}{dV} \frac{a_0^4}{e}, \rho_e u_k = j_k \frac{a_0^3}{e}, u_k = \frac{V_k / c}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, y^p = x^p mc / \hbar$$

При малом безразмерном потенциале оно почти совпадает с известным волновым уравнением, только вместо потенциала используется плотность потенциала.

В нелинейном приближении получается формула квантовой механики

$$\sum_{p=1}^3 \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^{p^2}} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^{0^2}} = -4\pi\rho_e u_k (1 + A_k) \text{ и описывается поведение электрона в атоме при}$$

условии  $\rho_e u_n = -\frac{1}{4\pi}; A_n = \psi_n - 1$ . Плотность потенциала равна волновой функции

без единицы. Уравнение выглядит следующим образом

$$\sum_{p=1}^3 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^{p^2}} - \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^{0^2}} = \psi_n$$

$$\sum_{p=1}^3 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^{p^2}} - \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^{0^2}} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi_n$$

Получено обобщение уравнений Максвелла, описывающее классическое и квантовое излучение элементарной частицы. Граница между классическим и квантовым решением является значение

$$A_0 = \frac{e}{ra_0^3} \frac{a_0^4}{e} = 1. \text{ Классическое решение}$$

наблюдается при условии  $r \gg a_0$ .

## 2. Связь уравнения Шредингера и Навье-Стокса

Уравнение Шредингера связано с уравнением Навье-Стокса. Получим из уравнения Шредингера уравнение Навье-Стокса в декартовой системе координат. Как промежуточный вариант получается первый интеграл уравнений Навье-Стокса. Определяются разделяющие константы в первом интеграле в случае декартовой системы координат по потенциальной энергии и определяется решение уравнений Навье-Стокса и Шредингера в новых условиях. Но описание профиля в виде полинома давления имеет свои проблемы. Надо задавать коэффициенты у формулы, описывающей давления.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi$$

Вычислим потенциальное решение уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат. Если взять волновую функцию в виде

$$\psi(t, x_1, x_2, x_3) \exp(-iEt / \hbar) = \exp[-iEt / \hbar + \sum_{k=1}^3 \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} dx_k],$$

то получим дифференциальное уравнение относительно логарифма волновой функции. Получаем первые интегралы уравнения Навье-Стокса

$$\begin{aligned} -E = -i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x_k^2} \right] - U = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \left( k_l^2 + \frac{\partial k_l}{\partial x_k} \right) - U; \\ -E_l &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( k_l^2 + \frac{\partial k_l}{\partial x_l} \right) - U - E_{l+1}; k_l = \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Получены первые интегралы уравнения Навье-Стокса, зависящие от трех переменных. Продифференцируем уравнение по координате, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial t} &= \sum_{k=1}^3 \left[ -V_k \frac{\partial V_n}{\partial x_k} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_k^2} \right] - \frac{\partial U}{m \partial x_n} \\ V_n &= \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Получим уравнение Навье-Стокса с кинематической вязкостью  $\nu = \frac{i\hbar}{2m}$ . Но имеется особенность этого уравнения, скорость течения должна быть потенциальная. Это сужает круг решаемых задач.

Одномерное решение уравнения Навье-Стокса  $u_l(z) - u_l^0(z) = [\sqrt{-(E_l - E_{l+1})} + az + b]$ ,  
 $a = \pm\sqrt{c_2}$ ,  $b = \pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} - \sqrt{-(E_l - E_{l+1})}$ ,  $E_l - E_{l+1} = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2}$ ,  $U(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2$ .

Отметим, что квантовые числа  $E_l - E_{l+1}, a, b$ .

Тогда одномерное уравнение Шредингера запишется в виде

$$-E_l = \frac{\hbar^2}{2m} (p_l^2 + \frac{\partial p_l}{\partial x_l}) - U(x_1, x_2, x_3) - E_{l+1}; p_l = \frac{\partial \ln \psi_l(x_l)}{\partial x_l}; \quad (2.2)$$

Попробуем решить уравнение Навье-Стокса в общем виде.

Задание профиля отрицательного потенциала или давления определяет комплексное турбулентное течение потока сжимаемой жидкости.

Решим уравнение (2.1). При условии

$$V_k(x_1, x_2, x_3) = u_k(x_1, x_2, x_3) - u_k^0(x_1, x_2, x_3) = [\sqrt{-(E_k - E_{k+1})} + \alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{sk}}], E_k = 0$$

Тогда получим уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \{2\sqrt{-(E_k - E_{k+1})}[\alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{ks}}] + \alpha_k^2(x_1, x_2, x_3) + 2\alpha_k(x_1, x_2, x_3) \sum_{s=1}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{ks}} + 2 \sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^{n_r} \frac{1}{x_k - \beta_{ks}} \frac{1}{x_k - \beta_{kn}} + \frac{\partial \alpha_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}\} - U(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Тогда в случае радиального квантового числа  $n_r = 0$ , получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^3 [2\sqrt{-(E_k - E_{k+1})}\alpha_k(x_1, x_2, x_3) + \alpha_k^2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \alpha_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}] - U(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Это уравнение в случае  $U_u(x_1, x_2, x_3) = \sum_{s,p,q=0}^{2N} c_{spq} (x_1 - x_{1u})^s (x_2 - x_{2u})^p (x_3 - x_{3u})^q$  полинома

$2N$  степени содержит  $(2N+1)^3$  уравнения, являющиеся коэффициентами полинома. Коэффициенты этого уравнения в случае полинома второй степени

равны  $c_{200u} = \frac{U_{s+2,pqu} + U_{s,pqu} - 2U_{s+1,pqu}}{2h^2}$

$$c_{100u} = \frac{U_{s+2,pqu} - U_{s,pqu}}{2h}, a_{000u} = U_{spqu} = U(x_{10} + sh, x_{20} + ph, x_{30} + qh)$$

$$a_{110} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{U_{s+2p+2qu} + U_{spqu} - U_{s+2pqu} - U_{sp+2qu}}{4h^2}$$

$$c_{210} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{U_{s+2p+2qu} + U_{sp+2qu} - U_{s+2pqu} - U_{spqu} - 2U_{s+1p+2qu} + 2U_{s+1pqu}}{16h^3}$$

$$c_{111} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{U_{s+2p+2q+2u} + U_{sp+2q+2u} + U_{spq+2u} - U_{sp+2q+2u} - U_{spq+2u} - U_{spqu}}{24h^3}$$

$$c_{220} = \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \left[ \frac{\partial^2 U[x_1, x_{20} + (p+2)h, x_3]}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1, x_{20} + ph, x_3)}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 U(x_1, x_{20} + (p+1)h, x_3)}{\partial x_1^2} \right] / 4h^2$$

$$c_{222} = \frac{\partial^6 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2} = \left[ \frac{\partial^4 U[x_1, x_2, x_{30} + (q+2)h]}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U(x_1, x_2, x_{30} + qh)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^4 U[x_1, x_2, x_{30} + (q+1)h]}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right] / 4h^2$$

$$\frac{\partial^2 U[x_1, x_{20} + ph, x_{30} + qh]}{\partial x_1^2} = \frac{U_{(s+2)pqu} + U_{spqu} - 2U_{(s+1)pqu}}{4h^4}$$

$$c_{221} = \frac{\partial^5 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3} = \left[ \frac{\partial^4 U[x_1, x_2, x_{30} + (q+2)h]}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^4 U(x_1, x_2, x_{30} + qh)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right] / 2h$$

Общий потенциал, разбивается на полиномы, аппроксимирующие функцию общего потенциала. Получим решение на отдельно взятом потенциале в виде полинома  $2N$  степени по каждой переменной итого  $(2N+1)^3$ . Это решение непрерывное, так как потенциал на границах общий. Функции

$$\alpha_{ku}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{s,p,q=0}^N b_{kspq} (x_1 - x_{1u})^s (x_2 - x_{2u})^p (x_3 - x_{3u})^q \text{ являются полиномом степени } N$$

содержит  $3(N+1)^3$  неизвестных коэффициентов. Плюс три неизвестных коэффициента  $\sqrt{-(E_k - E_{k+1})}$ . Итого имеем уравнение  $(2N+1)^3 = 3(N+1)^3 + 3$ . Из равенства количества неизвестных количеству уравнений имеем  $N=1$ . В случае двух переменных имеем уравнение  $(2N+1)^2 = 2(N+1)^2 + 1$  и надо использовать одно значение собственной энергии. Задача имеет не единственное решение, так как необходимо решать квадратное уравнение. При другом радиальном числе прибавится степень уравнения и на столько же прибавится количество неизвестных коэффициентов  $\beta_k$ . Среди коэффициентов потенциала  $U(x_1, x_2, x_3)$  степени  $2N$  могут быть  $p \leq N-1$  неизвестных коэффициента, остальные коэффициенты надо задавать. Тогда количество неизвестных давления равна  $[2(N-p)+1]^3$ , а количество неизвестных в функции  $\alpha_k(x_1, x_2, x_3)$  равно  $3(N-p+1)^3$ , остальные надо задавать. При этом имеем  $N = p+1$ .

Решение этой задачи можно получить в аналитическом виде. Если ротор полученной скорости равен нулю, т.е. решение потенциальное, то эта скорость является решение уравнения Навье-Стокса. Если ротор не равен нулю, то этот первый интеграл определяется вдоль траектории и необходимо дополнительно решить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{d\tau} = & \operatorname{Re} V_k(x_1, x_2, x_3) + \sqrt{2} \operatorname{Im} V_k(x_1, x_2, x_3) \sin \left\{ \int_0^\tau [2 \operatorname{Im} V_k(x_1, x_2, x_3) / d + \right. \\ & \left. + e_{kpq} \left( \frac{\partial \operatorname{Im} V_q(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_p} - \frac{\partial \operatorname{Im} V_p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_q} \right)] d\tau \right\}; \\ V_k = & V_k[x_1(t, x_1^0, x_2^0, L), x_2(t, x_1^0, x_2^0, L), x_3(t, x_1^0, x_2^0, L)] \end{aligned}$$

С начальными условиями  $x = x_k(t_0, x_1^0, x_2^0, L) = x_k^0$ , заданными на плоскости  $x_3^0 = L$  В результате получим значение координаты  $x_k = x_k(t, x_1^0, x_2^0, L)$  и значение волновой функции

$$\begin{aligned} \psi(t, x_1^0, x_2^0, L) \exp(-iEt / \hbar) &= \exp[-iEt / \hbar + \\ + \sum_{k=1}^3 \int_0^t \frac{\partial \ln \psi[x_1(t, x_1^0, x_2^0, L), x_2(t, x_1^0, x_2^0, L), x_3(t, x_1^0, x_2^0, L)]}{\partial x_k} \frac{dx_k(t, x_1^0, x_2^0, L)}{dt} dt] &= . \\ = \exp\{-iEt / \hbar + \sum_{k=1}^3 \int_0^t \frac{m}{\hbar} [\frac{dx_k(t, x_1^0, x_2^0, L)}{dt}]^2 dt\} \end{aligned}$$

Если ротор скорости в дифференциальном уравнении равен нулю, то получаем обычное уравнение траектории с ламинарным решением. Если еще ротор действительной части скорости равен нулю, то получаем решение задачи.

Задача сводится к дифференциальному уравнению  $\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{\partial \ln \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}$  значит

скорость потенциальная с определяемым потенциалом при интегрировании по произвольному контуру

$$\ln \varphi(x_1, x_2, x_3) - \ln \varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \sum_{l=1}^3 \int_{x_l^0}^{x_l} \frac{\partial \ln \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_l} dx_l = \sum_{l=1}^3 \int_{x_l^0}^{x_l} V_l(x_1, x_2, x_3) dx_l$$

откуда определится формула для волновой функции. Если ротор действительной части не равен нулю, то нужно получить решение вдоль траектории и полученный потенциал зависит от линии тока. Если ротор мнимой части решения не равен нулю, то получаем турбулентное колеблющееся решение.

Уравнение неразрывности в случае потенциального решения определять не надо, оно определится из решения уравнения Шредингера относительно волновой функции.

Возможно также решение при трех компонентах скорости, зависящей от той же компоненты координаты. Тогда ротор скорости равен нулю и получаем потенциальное решение задачи.

Решим одномерную задачу в случае  $p = 0$ ,  $n_r = 0$ . Имеем уравнение

$$2\sqrt{-E_z}(az + b) + a^2 z^2 + 2abz + b^2 + a - (c_0 + c_1 z + c_2 z^2) = 0.$$



Величина  $\frac{dp}{\rho dz}$  в одномерном случае интегрируется с интегралом, равным полиному. Эта система уравнений имеет два решения

$$a = \pm\sqrt{c_2}, E_z = c_0 - \frac{c_1^2}{4c_2} \mp \sqrt{c_2}, b = \pm \frac{c_1}{2\sqrt{c_2}} \mp \sqrt{-E_z}.$$

Алгоритм позволяет получать счетное количество решений при произвольном значении давления или потенциала. Задачу можно свести к нахождению значения корней полинома. Дополнительные материалы по решению уравнения Навье-Стокса см. в литературе [2], [3], [4].

### **3. Связь уравнения ОТО, уравнения Навье-Стокса и уравнения Шредингера.**

Уравнение ОТО описывает искривление пространства, и материальные тела движутся по инерции в этом искривленном пространстве. Для преодоления силы гравитации тело должно обладать тягой. Аналогично двигающееся в среде тело искривляет потоки среды, и тело движется с постоянной скоростью. Тяга тела создает дополнительное искривление среды. В обоих случаях среда искривляется и сумма сил, действующих на тело равна нулю. Оказывается, что в обоих случаях искривление пространства вызывает скорость среды, скорость гравитонов в случае гравитации, и скорость молекул среды в случае гидродинамики. Приравнивая скорость среды получаем связь между решениями уравнения Навье-Стокса и ОТО.

Так как уравнение Навье-Стокса связано с уравнением Шредингера, получаем связь между решением квантовой механики и решением уравнения гравитации. В самом деле уравнение ОТО квантовое. Метрический тензор входит в этом уравнении в нулевой степени. Вместе с ковариантной компонентой метрического тензора имеется и контравариантная компонента. Но проблема в том, что это уравнение нелинейное, в отличии от уравнения

Шредингера. Но и уравнение Навье-Стокса нелинейное, однако связано решением с линейным уравнением Шредингера. Также связано решение уравнения Шредингера и ОТО. Из решения уравнения ОТО можно получить решение уравнения Шредингера и Навье-Стокса, а как покажем далее по тексту по скорости среды можно вычислить метрический тензор. Уравнение ОТО описывает искривление пространства, поэтому наиболее общее. Уравнение Навье-Стокса - это уравнение 2 закона Ньютона для среды, причем действие потенциала, аналогично действию искривления среды. Уравнение Шредингера - это линейный аналог уравнения Навье-Стокса. Поэтому все три уравнения связаны.

Но уравнение ОТО справедливо и при большой скорости, поэтому необходимо использовать релятивистское уравнение Навье-Стокса и уравнение Клейна-Гордона. Докажем, что они эквивалентны.

Получим из релятивистского уравнения Навье – Стокса уравнение Клейна-Гордона. Рассмотрим уравнение Навье - Стокса с кинематической вязкостью  $\nu = \frac{i\hbar}{2m}$  записанное в релятивистской форме, причем без учета теплового потока.

Если релятивистское уравнение Навье – Стокса записано относительно тепловой функции единицы объема  $w = e + p$  в локальной системе покоя см. [3]§133, то в предлагаемой формуле используется плотность в локальной системе покоя

$$\frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^l \partial x_l} \right) - u^0 \frac{\partial u_k}{\partial x^0} - u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l} = \frac{\partial p}{\rho \partial x^k}.$$

Получили релятивистское инвариантное уравнение Навье – Стокса.

Воспользуемся равенством для четырехмерной скорости

$u_k = -\frac{i\hbar}{m} \nabla_k \ln \psi, k = 0, \dots, 3$ . При этом это равенство можно представить в виде

$p_l \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x^l}, l = 0, \dots, 3$ , откуда имеем определение оператора импульса

$p_l = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^l}, l = 0, \dots, 3$ . Т.е. четырехмерный импульс частиц вакуума является собственным числом оператора импульса.

$$\begin{aligned} & \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^k} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x_l} + \\ & + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} \end{aligned}$$

Разделим это уравнение на величину  $\frac{\hbar^2}{m^2}$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x^l \partial x_l} + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_0} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_l} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^l} - \frac{2m^2}{\hbar^2} \int_{s_0}^s \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} u^k ds \right] = 0.$$

Где величина  $dx^k = u^k ds, k = 0, \dots, 3$ , при этом интеграл вдоль траектории равен

$$\begin{aligned} c^2(s) - c^2(s_0) &= c^2(x^0, x^1, x^2, x^3) - c^2(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \int_{s_0}^s \frac{dc^2}{ds} ds = \\ &= - \int_{s_0}^s \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} u^k ds = - \int_{(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)}^{(x^0, x^1, x^2, x^3)} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} dx^k \end{aligned}$$

Причем как функция метрического интервала, эта величина инвариантна относительно преобразования Лоренца. Где величина  $s$  соответствует значению интервала, и интеграл берется вдоль траектории движения частиц. Причем частная производная от этого интеграла вдоль траектории, равна

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \int_{(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)}^{(x^0, x^1, x^2, x^3)} \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} dx^k = \frac{d}{u^l ds} \int_{s_0}^s \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} u^k ds = \frac{\partial p}{u^l \rho \partial x^k} u^k = \frac{dp}{u^l \rho ds} = \frac{\partial p}{\rho \partial x^l}$$

Проинтегрируем это уравнение, получим

$$\left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x^1 \partial x_1} + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_0} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^1} \right] - \frac{2m^2}{\hbar^2} \int_{s_0}^s \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} u^k ds =$$

$$= -m^2 c^2 / \hbar^2$$

Где константу интегрирования обозначили  $m^2 c^2 / \hbar^2$ . Умножим это уравнение на

величину  $\psi$  и воспользуемся равенством  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^0 \partial x_0} = \psi \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^0} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_0} \right]$ ,

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^1 \partial x_1} = \psi \left[ \frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial x^1 \partial x_1} + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x_1} \right]$  получим уравнение Клейна-Гордона с

потенциалом.

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^1 \partial x_1} - \frac{2mU}{\hbar^2} \psi = m^2 c^2 \psi / \hbar^2;$$

$$U = -m \int_{s_0}^s \frac{\partial p}{\rho \partial x^k} u^k ds = mc^2(x^0, x^1, x^2, x^3) - mc^2(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3) < 0$$

При этом время жизни стационарного состояния зависит от координаты

частицы  $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp[-i(E\Delta t - i\mathbf{p}_0 \Delta \mathbf{r}) / \hbar] [1 + 0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3]$ .

При этом локальное решение сводится к равенству

$$E^2 = p_0^2 c^2 + 2mUc^2 + m^2 c^4.$$

Это уравнение приводится к виду

$$E - mc^2 = \frac{p_0^2}{2m} + U = \frac{p_0^2}{2m} + mc^2(x^0, x^1, x^2, x^3) - mc^2(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$$

Проблема связи уравнения ОТО и уравнения Навье-Стокса дискутируется в зарубежной литературе. Так в диссертации [5] получена связь этих уравнений в линейном приближении около горизонта событий. Но понимания, что турбулентное решение комплексное в этих работах нет, так как используется линеаризация уравнений. В работе [6] получена связь этих уравнений в случае

“Killing vector field”. Но связь задается неявным образом. В предлагаемой работе дается явная связь между решением уравнения ОТО, ее метрическим тензором и волновой функцией уравнения Шредингера.

Общая теория относительности построена для макротел, и гравитоны вращаются с мнимой скоростью и поступательно движутся с действительной скоростью. Определим квадрат комплексной координаты гравитонов, двигающихся с поступательной скоростью  $V_{s\alpha}, s = 1, \dots, 3, \alpha$  номер частицы. При этом частицы будут вращаться с переменной мнимой скоростью  $iw_{s\alpha}(t, x_1, \dots, x_3)$ . По поводу определения и использования комплексной скорости частиц см. [4], [7], [8], [2]. Мнимая часть комплексной скорости соответствует хаотическим колебаниям или вращениям частицы. Считаем, что скорости частиц равномерно распределены в малом объеме, причем скорость вращения равна  $w_{s\alpha} = w_{s\alpha}(t, x_1, \dots, x_3)$ . Кроме того, имеется скорость поступательного движения  $V_{s\beta} = V_{s\beta}(t)$ , поступательное движение малого объема зависит только от времени. Считаем интервал, усредняя приращение скорости гравитонов общего вида

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 (idw_{s\alpha} + dV_{s\beta})^2 t_q^2 / (4N^2) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left( i \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^k} dx^k + i \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial t} dt + \frac{dV_{s\beta}}{dt} dt \right)^2 t_q^2 / (4N^2) = \\
&= - \sum_{\alpha=-N}^N \sum_{s=1}^3 \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^l} t_q^2 / (2N) dx^k dx^l + \\
&+ \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left[ 2 \frac{\partial iw_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{dV_{s\beta}}{dt} - 2 \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial t} \right] dx^k dt \cdot t_q^2 / (4N^2) + \\
&+ \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left[ \left( \frac{dV_{s\beta}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial iw_{s\alpha}}{\partial t} \frac{dV_{s\beta}}{dt} - \left( \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial t} \right)^2 \right] dt^2 t_q^2 / (4N^2) = (3.1) \\
&= - \sum_{k,l=1}^3 g_{kl} dx^k dx^l + 2 \sum_{k=1}^3 g_{k0} dx^k c dt + g_{00} c^2 dt^2
\end{aligned}$$

Константа  $t_q = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 c} = \frac{\hbar^3}{137 m_e e^4}$  это постоянная квантовой механики. В

результате вычисленный интервал оказывается совпадающим с интервалом ОТО. Откуда следует новая формула вычисления метрического тензора, как усреднение скорости гравитонов. Кроме того, получаем все свойства пространства времени, которые следуют из ОТО. Т.е. получаем формулу инвариантного интервала общей теории относительности. Отметим, что для гравитонов справедлива формула сложения скоростей Галилея, добавка к скорости константы не изменяет метрический тензор. Но образовавшийся метрический тензор приводит к релятивистской формуле сложения скоростей.

Из соотношения для квадрата комплексной скорости, получен метрический тензор ОТО и СТО.

$$\begin{aligned} g_{kl} &= \sum_{\alpha=-N}^N \sum_{s=1}^3 \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^l} t_q^2 / (2N) \\ g_{k0} &= - \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left( \frac{\partial w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial w_{s\alpha}}{c \partial t} - \frac{\partial i w_{s\alpha}}{\partial x^k} \frac{dV_{s\beta}}{c dt} \right) t_q^2 / (4N^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

при этом коэффициент при временной компоненте метрического тензора равен

$$g_{00} = \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left[ \left( \frac{dV_{s\beta}}{c dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial i w_{s\alpha}}{c \partial t} \frac{dV_{s\beta}}{c dt} - \left( \frac{\partial w_{s\alpha}}{c \partial t} \right)^2 \right] t_q^2 / (4N^2)$$

Вычисление метрического тензора с помощью аналога теории возмущений определяет следующую сумму

$$\left( \frac{\Delta w_0}{c} \right)^2 + \left( -\frac{2U}{E - E_k} \right) + \left( -\frac{2U}{E - E_k} \right)^2 + \dots = \left( \frac{\Delta w_0}{c} \right)^2 + \left( -\frac{2U}{mc^2} \right) + \left( -\frac{2U}{mc^2} \right)^2 + \dots$$

Где  $E_k$  положительная собственная энергия свободного состояния системы, зависящая от волнового числа  $k$ ,  $E$  полная релятивистская энергия системы, величина возмущения равна потенциальной энергии системы, равная разности кинетической энергии  $m[(\Delta w_1)^2 - (\Delta w_0)^2] / 2 = -U$  после воздействия возмущения и до наличия возмущения.

Расписываем уравнение с учетом возмущения  $g = \sum_m c_m g_m^0$  величина  $g_m^0$

получается ортогонализацией  $\exp[-(m+1)^2 (\Delta w_0)^2 / (4c^2)]$

$$\sum_m c_m (E_m - U) g_m^0 = \sum_m c_m E g_m^0.$$

Получаем уравнение умножая на ортонормированную величину  $g_n^0, (g_n^0, g_m^0) = \delta_{nm}$

$$(E - E_n^{(0)}) c_n = - \sum_m c_m U_{mn} = - \sum_m c_m U_n$$

$$c_m = c_m^0 + c_m^1 + \dots; c_m^0 = \delta_{nm}; U_{mn} = \int g_m^0 U g_n^0 d^3x$$

Получаем первое и следующее приближение из уравнения  $n \neq m$

$$c_n^1 = \frac{-U_n}{E - E_n^{(0)}}, c_n^2 = c_n^1 \frac{-U_n}{E - E_n^{(0)}} = \left( \frac{-U_n}{E - E_n^{(0)}} \right)^2, \dots$$

Вычислим значение  $U_n$

$$U_n = \sum_n \delta_{nm} \frac{1 + \frac{-U_n}{E - E_n^{(0)}} + \dots}{1 + \frac{-U_n}{E - E_n^{(0)}} + \dots} U_{nm} = U_{nm},$$

получим счетное количество решений

$$g_{rr}^0 = \sum_{s=1}^3 \left( \frac{i\Delta w_s}{c\Delta t} \right)^2 t_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(\Delta w_0)^2}{c^2} \frac{g_0^2(\Delta w_0)}{\sqrt{2\pi c}} d\Delta w_0 - \left( -\frac{2U_0}{c^2 m} \right) - \left( -\frac{2U_0}{c^2 m} \right)^2 + \dots =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(\Delta w_0)^2}{c^2} \frac{\exp[-m_\gamma (\Delta w_0)^2 / (2m_\gamma c^2)]}{\sqrt{2\pi c}} d\Delta w_0 - \left( -\frac{2U_0}{c^2 m} \right) - \left( -\frac{2U_0}{c^2 m} \right)^2 + \dots =$$

$$= -1 - \left( \frac{2GM}{rc^2} \right) - \left( \frac{2GM}{rc^2} \right)^2 + \dots = -\frac{1}{1 - 2GM/(rc^2)} = -\frac{1}{1 - r_g/r};$$

$$g_{rr}^n = \sum_{s=1}^3 \left( \frac{i\Delta w_s}{c\Delta t} \right)^2 t_q^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(\Delta w_0)^2}{c^2} g_n^2(\Delta w_0) d\Delta w_0}{\int_{-\infty}^{\infty} g_n^2(\Delta w_0) d\Delta w_0} - \left( -\frac{2U_n}{c^2 m} \right) - \left( -\frac{2U_n}{c^2 m} \right)^2 + \dots =$$

$$= -c_n - \left( \frac{2GM_n}{rc^2} \right) - \left( \frac{2GM_n}{rc^2} \right)^2 + \dots = -c_n + 1 - \frac{1}{1 - 2GM_n/(rc^2)} = -c_n + 1 - \frac{1}{1 - r_{gn}/r};$$

Имеем, используя вместо кинетической энергии системы полную энергию

$$g_{00}^0 = \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left( \frac{dV_{s\beta}}{cdt} \right)^2 t_q^2 / (4N^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta V)^2 - 2U_0 / m \exp[-m_\gamma (\Delta V)^2 / (2m_\gamma c^2)]}{c^2 \sqrt{2\pi c}} d\Delta V =$$

$$= 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - r_g / r, r_g = 2GM / c^2$$

$$g_{00}^n = \sum_{\alpha, \beta=-N}^N \sum_{s=1}^3 \left( \frac{dV_{s\beta}}{cdt} \right)^2 t_q^2 / (4N^2) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta V)^2}{c^2} [g_n^0(\Delta V)]^2 d\Delta V}{\int_{-\infty}^{\infty} [g_n^0(\Delta V)]^2 d\Delta V} - \frac{2U_n}{mc^2} =$$

$$= c_n - \frac{2GM_n}{c^2 r} = c_n - r_{gn} / r, r_{gn} = 2GM_n / c^2$$

, Но

такое же преобразование можно проделать и с временной частью метрического тензора используя  $K_{m+1} = (-\frac{2U_n}{mc^2})(1 - K_m)$ . Т.е. статистическое усреднение

допускает следующие метрические тензоры  $h_{rr} = -\frac{1}{1 - r_g / r}, h_{00} = 1 - r_g / r$  и

$h_{00} = \frac{1}{1 + r_g / r}, h_{rr} = -(1 + r_g / r)$ . Второй вариант статистического усреднения

предполагает отрицательность плотности вероятности у нечетных членов разложения и должен быть отвергнут. Получается, что решение Шварцшильда для одиночного тела соответствует скорости распределения Максвелла и независимости скорости гравитонов от потенциала. Также как уравнение Шредингера имеет счетный набор решений, уравнение ОТО имеет счетный набор решений. Решая уравнение Навье-Стокса получаем значение скорости гравитонов и их усреднение приводит к другому решению уравнения ОТО.

Кроме того, подтверждается, что турбулентная комплексная скорость среды создает гравитационное поле см. [1].

Определение метрического тензора сводится к уравнению, где метрический тензор зависит от гравитационного и электромагнитного поля



$$\begin{aligned}
g_{nm} u^n u^m &= g_{nm} \frac{p^n}{mc} \frac{p^m}{mc} = 1 \\
g_{00} (p^0)^2 + 2 \sum_{n=1}^3 g_{n0} p^n p^0 + \sum_{n,m=1}^3 g_{nm} p^n p^m &= \\
= \sum_{n=0}^3 p_n p^n = m^2 c^2 = g_{00} (p^0)^2 - \sum_{\beta=1}^3 [g_{k0} (a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_\beta - & \\
- \sum_{\beta=1}^3 [\sqrt{-\lambda_\beta} a_k^\beta p^k + g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} p^0 / \sqrt{-\lambda_\beta}]^2 = m^2 c^2; & \\
\sum_{\gamma=1}^3 (g_{\alpha\gamma} - \lambda_\beta \delta_{\alpha\gamma}) a_\beta^\gamma = 0; |g_{\alpha\gamma} - \lambda_\beta \delta_{\alpha\gamma}| = 0, \alpha = 1, \dots, 3 &
\end{aligned}$$

Причем справедливо определение обобщенной энергии  $E$  по формуле

$$\frac{E^2}{c^2} = g_{00} (p^0)^2 - \sum_{\beta=1}^3 [g_{k0} (a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_\beta$$

так как нулевая проекция импульса  $p^0$

ответственна за энергию. При этом величина обобщенного импульса равна  $P^\beta = \sum_{k=1}^3 [\sqrt{-\lambda_\beta} a_k^\beta p^k + g_{k0} (a_\beta^k)^{-1} p^0 / \sqrt{-\lambda_\beta}]$ , так как содержит линейную комбинацию

четырёхмерного импульса. При этом имеется связь между обобщенной энергией

$E$  и обобщенным импульсом  $P^\beta$ , причем эта энергия и импульс описывает скорость гравитонов, т.е. среды

$$\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^3 (P^\beta)^2 + m^2 c^2$$

Аналогом этой формулы в СТО является формула  $\frac{E^2}{c^2} = \sum_{\beta=1}^3 (p^\beta)^2 + m^2 c^2$  см. [9].

Величина  $(E/c, P^\beta) = mc(U^0, U^\beta), U^k = \frac{dy^k}{ds}$  соответствует

четырёхмерному импульсу среды с учетом гравитационного поля в искривленном пространстве

$y^k, k = 0, \dots, 3$ .

Предварительно надо связать величины скоростей  $V^l / c = dx^l / c dt$ , полученных дифференцированием по времени, с четырёхмерными скоростями

$\frac{p^l}{mc} = u^l = dx^l / ds$  по формуле  $V^l / c = u^l \alpha, l = 0, \dots, 3, V^0 = c$ , где необходимо

определить коэффициент пропорциональности  $\alpha$ . Причем это нужно сделать для каждой частицы или тела. Назовем скорость  $V^l/c$  трехмерной скоростью в системе координат. Скорость  $u^l$  называется четырехмерной скоростью. Это скорость движения среды, описывающей скорость гравитонов. Тогда имеем связь трехмерной скорости с четырехмерной скоростью, полученной, по аналогии с СТО, при этом будем записывать и формулы СТО для сравнения

$$u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}}, u^n = \frac{V^n/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3.4)$$

Формулу можно преобразовать к виду, она получается умножением формулы двух скоростей, вычисленных по формуле (3.4), умноженных на соответствующий метрический тензор и эта величина суммируется

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00} + 2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2} = 2g_{k0}u^k u^0 + g_{kn}u^k u^n.$$

Преобразуем это уравнение, получив из равенства  $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$  соотношение

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{1-c}$$

$$\frac{2g_{k0}V^k/c + g_{kn}V^kV^n/c^2}{g_{00}} = \frac{2g_{k0}u^k u^0 + g_{kn}u^k u^n}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - g_{kn}u^k u^n}$$

Подставляя значение скорости, полученной с помощью времени, выраженное через компоненту четырехмерной скорости, получим уравнение по определению  $\alpha$

$$\frac{2g_{k0}u^k u^0 + \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}{g_{00}} \alpha^2 = \frac{2g_{k0}u^k u^0 + \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}$$

Откуда находи  $\alpha = \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}}$ . При этом значение трехмерной

скорости равно  $V^l / c = u^l \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}}$ , которая является аналогом

формулы  $V^l / c = \frac{u^l}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^3 (u^l)^2}} < 1$ .

Итак, из уравнения ОТО через значение метрического тензора получено значение трехмерной скорости гравитонов, т.е. среды, которое можно приравнять решению уравнения Навье-Стокса, которое тоже описывает скорость среды.

Аналогия продолжается, уравнение ОТО для макротел содержит тензор энергии-импульса, который зависит от плотности энергии и давления, которые связаны уравнением состояния. Эти параметры плюс скорость материальных тел из ОТО определяются. Уравнение Навье-Стокса содержит градиент давления, которое в результате решения уравнения Навье-Стокса определяется. Зная скорость среды, зависящую от скорости тела, можно определить силы, действующие на тело, вызывающего скорость потоков среды, значит приравнивая ускорение нулю, определить скорость тела, как и в случае ОТО, определяется скорость тел, вызывающих гравитационное поле.

Так как решение уравнения Навье-Стокса связано с решением уравнения Шредингера зависимостью  $V_l = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^l}$ , и решение уравнения ОТО

$$\begin{aligned}
V_l(x_1, x_2, x_3) &= u^l c \sqrt{\frac{g_{00}}{1 - 2g_{k0}u^k u^0 - \sum_{k,n=1}^3 g_{kn}u^k u^n}}, \\
P^0 &= mcU^0 = \sqrt{g_{00}(p^0)^2 - \sum_{\beta=1}^3 [g_{k0}(a_\beta^k)^{-1}]^2 (p^0)^2 / \lambda_\beta}, \quad (3.5) \\
P^\beta &= mcU^\beta = \sum_{k=1}^3 [\sqrt{-\lambda_\beta} a_k^\beta p^k + g_{k0}(a_\beta^k)^{-1} p^0 / \sqrt{-\lambda_\beta}]
\end{aligned}$$

Для одиночного тела можно вычислить эти обобщенные импульсы. Имеем функцию Гамильтона  $H^2 = \sum_{\beta=1}^3 (P^\beta)^2 c^2 + m^2 c^4$ . Уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dP^\beta}{d\tau} = 0, P^\beta = P_0^\beta \quad \frac{dy_\beta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial P^\beta} = -\frac{P_0^\beta c}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (P_0^\alpha)^2 + m^2 c^2}}.$$

Набор обобщенных импульсов описывают движение среды или пробной частицы в искривленном пространстве  $y_\beta$  по инерции. В искривленном пространстве пробная частица движется с постоянной скоростью. Зная обобщенные импульсы по второй и третьей формуле (3.5) можно вычислить четырехмерную переменную скорость среды относительно не искривленных координат.

Скорости пробной частицы, или скорости гравитонов среды можно также определить из уравнений движения  $\frac{du^k}{ds} + \Gamma_{pq}^k u^p u^q = 0, p^k = m c u^k$ .

Доказано, что метрический тензор уравнения ОТО определяет скорость среды и уравнение Навье-Стокса тоже определяет скорость среды. Но скорость среды в уравнении Навье-Стокса связана с решением уравнения Шредингера зависимостью

$$\begin{aligned}
\psi &= \exp(i \int m V_l(x^1, x^2, x^3) dx^l / \hbar) = \exp[i \int m V_l^2(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3) dt / \hbar], \\
\frac{dx^l}{dt} &= \operatorname{Re} V^l(x^1, x^2, x^3) + \operatorname{Im} V^l(x^1, x^2, x^3) \sin \operatorname{rot} \operatorname{Im} V^l(x^1, x^2, x^3) t; x^l = x^l(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3).
\end{aligned}$$

По поводу определений линий тока комплексного турбулентного потока или действительного ламинарного потока см. [11]. Так как уравнение ОТО и Навье-Стокса определяют скорость среды, значит и скорость среды, определяемая решением уравнения ОТО связана с волновой функцией той же зависимостью.

Уравнение Навье-Стокса описывает турбулентный комплексный режим течения, который описан в [4], [7], [8], [2]. Уравнение ОТО описывает комплексное, а значит турбулентное течение за горизонтом событий см. [10].

#### **4. Формула для вычисления энергии ядра и**

#### **многоэлектронного атома с помощью квантового уравнения ОТО**

Уравнение ОТО является квантовым, так как коэффициент пропорциональности у метрического тензора вычисляется с точностью до множителя. Наряду с ковариантной компонентой метрического тензора имеется и контравариантная компонента метрического тензора. Получена общая формула для импульса уравнения ОТО в случае стационарного решения. По ним вычислена стационарная энергия уравнения ОТО, зависящая от 6 целых чисел. Формула получилась очень красивая, содержит обратный квадрат целого числа и уточнение этой зависимости от целых чисел. Уточнение зависимости от целых чисел получается путем подстановки в 6 независимых уравнений ОТО. Метрический тензор в решении Шварцшильда оказался постоянным, что позволило вычислить константы сильного взаимодействия. Используя среду см. [1] решено уравнение ОТО для вращательных и колебательных значений энергии, которое применили для описания ядра атома. Происходит автоматическое образование кварков и глюонов в случае стационарных свойств среды. Для этого вычислен заряд ядерных сил, подчиняющихся уравнению ОТО. Получены формулы для собственной энергии ядра, которые совпадают с экспериментальными значениями с точностью 2-10%. В случае электрона в много электронном атоме возможно описание свойств среды, которая образует

электроны в атоме и электромагнитное поле. Свойства среды определяются значением постоянной тонкой структуры. Отмечу, что данные формулы определяют среднее значения спектра, при заданных квантовых числах. В частности, формула для ядра описывает два уровня энергии, которые определяют кварки нуклона и кварки из протонов и нейтронов, результате при совпадающем решении массы частиц оказываются разными. В случае нескольких электронов описывается одно состояние, так к примеру ортогелий и парагелий не различаются, берется среднее значение, что и приводит к отклонению от мгновенного значения энергии, которое зависит от времени и ортогелий переходит в парагелий и наоборот.

Решение строится на основе уравнения ОТО для электромагнитного поля см. [14]. Причем уравнение ОТО справедливо для произвольного поля, надо только правильно описывать метрический тензор и ввести антисимметричную часть символа Кристоффеля см. [21]. Общее свойство электронов в атоме и кварков в ядре атома, что они описываются как частицы вакуума с разной плотностью см. [1]. Разная плотность частиц вакуума приводит к разным постоянным взаимодействия, равным  $\alpha = 1/137\sqrt{3}$  для электромагнитного поля и равным  $\alpha = \sqrt{2/3}$  для поля ядерных сил, без учета электромагнитного взаимодействия, причем в формулах участвует  $\alpha^2$ . Эти константы вошли в окончательный вид формул, после всех преобразований. Изменять уравнения ОТО для получения квантового решения не надо, они описывают уравнение квантовой механики. Основным свойством уравнений квантовой механики является линейная зависимость от волновой функции каждого члена этого уравнения, или разделив на волновую функцию получим нулевую степень волновой функции. Оказывается, что левая часть уравнения ОТО

$$R_{lk} - \frac{1}{2} g_{lk} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{lk}$$

содержит метрический тензор в нулевой степени. Докажем это. Тензор Риччи содержит символ Кристоффеля, равный  $\Gamma_{lk}^n = g^{np} \Gamma_{p.lk} = \frac{1}{2} g^{np} \left( \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^p} \right)$ , т.е. содержит произведение обратного метрического тензора, на метрический тензор, т.е. тензор нулевой степени. Тензор Риччи состоит из таких символов Кристоффеля и значит имеет нулевой порядок метрического тензора. Произведение  $g_{lk} R = g_{lm} g^{mp} R_{pk}$  тоже имеет нулевой порядок метрического тензора.

Но у квантового уравнения волновая функция определяется не единственным образом. В линейном случае волновых функций имеется счетное количество. Найти счетное количество волновых функций у системы из 6 нелинейных уравнений сложная задача. При этом имеется счетное количество равных волновых функций  $\varphi_y(n_1 Y_1, n_2 Y_2, n_3 Y_3) = \varphi_x(m_1 X_1, m_2 X_2, m_3 X_3)$  имеющих тот же метрический тензор описывающий колебательные и вращательные волновые функции. Следовательно, при метрическом тензоре, зависящим от квантовых чисел  $n, m$  найдутся волновые числа  $p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, k_{1m}, k_{2m}, k_{3m}$ , чтобы два значения волновой функции совпали. Волновые числа определяются из равенства двух функций

$$\sum_{k=1}^3 p_k (y_k - y_{k0}) \frac{\partial \varphi_y(n_1 Y_1, n_2 Y_2, n_3 Y_3)}{\partial Y_k} = \sum_{k=1}^3 k_{kn} (x_k - x_{k0}) \frac{\partial \varphi_x(m_1 X_1, m_2 X_2, m_3 X_3)}{\partial X_k}.$$

Тогда из равенства локально постоянных аргументов  $y_{k0} = x_{k0}$  следует равенство линейных безразмерных переменных аргументов  $y_k = x_k$  при условии

$$p_{kn} = 1 / \frac{\partial \varphi_y(n_1 Y_1, n_2 Y_2, n_3 Y_3)}{\partial Y_k}; Y_k - Y_{k0} = \int_0^{y_k} p_{kn} [Y_k(y_k)] dy_k = \int_0^{y_k} \frac{\exp[-in_k b_x Y_k(y_k)]}{im_k b_k} dy_k$$

$$k_{km} = 1 / \frac{\partial \varphi_x(m_1 X_1, m_2 X_2, m_3 X_3)}{\partial X_k}; X_k - X_{k0} = \int_0^{x_k} k_{km} [X_k(x_k)] dx_k = \int_0^{x_k} \frac{\exp[-im_k a_x X_k(x_k)]}{im_k a_k} dx_k$$

Откуда следует равенство  $\varphi_y(n_1 Y_1, n_2 Y_2, n_3 Y_3) = \varphi_x(m_1 X_1, m_2 X_2, m_3 X_3)$ , где обе волновые функции произвольные. Если квантовые числа двух волновых функций совпадут, то функции будут одинаковые.

Волновая функция должна обращать в ноль усредненное по пространству уравнение ОТО. Откуда определяются волновые функции, зависящие от произвольных квантовых чисел и от 6 констант, каждая из которых обращает в ноль уравнение ОТО. Формула для волновой функции имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_x(m_1 X_1, m_2 X_2, m_3 X_3) &= \exp(im_1 a_1 X_1 + im_2 a_2 X_2 + im_3 a_3 X_3) \\ \varphi_{y\psi}(n_1 Y_1, n_2 Y_2, n_3 Y_3) &= \exp(in_1 b_1 Y_1 + in_2 b_2 Y_2 + in_3 b_3 Y_3)\end{aligned}$$

При этом имеем соотношение  $k_l dx_l = \frac{p_l}{mc\varphi_x} dx_l$  откуда имеем значение

импульса  $p_l = mck_l\varphi_x = mc \frac{\partial \ln \varphi_x}{\partial X_l} = mc / im_l a_l, u_{lx} = 1 / im_l a_l$ . Эта формула описывает

энергию 3 колебательных и трех вращательных степеней свободы

$$E_{nm} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^3 (u_{lx} + u_{ly})^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^3 \left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{n_l}\right)^2 \frac{1}{a^2}}}.$$

Величины функций  $X_k(x_k)$  определяются из системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dX_k(x_k)}{dx_k} &= \exp[-im_k a_k X_k(x_k)] / im_k a_k; \\ im_k a_k (X_k - X_{0k}) &= \ln(x_k / x_k^0); \varphi_x = x_1 x_2 x_3 / (x_1^0 x_2^0 x_3^0); \\ x_k(X_k) &= x_k(X_{0k}) \exp[im_k a_k (X_k - X_{0k})]; x_k(X_k) = \exp(im_k a_k X_k) \\ \varphi_x(X_1, X_2, X_3) &= \exp\left(\sum_{k=1}^3 im_k a_k X_k\right)\end{aligned}$$

В атоме и ядре атома частица движется по обобщению сферы на комплексные координаты  $rr^* = x_1(x_1)^* + x_2(x_2)^* + x_3(x_3)^* = x_1^0(x_1^0)^* + x_2^0(x_2^0)^* + x_3^0(x_3^0)^* = 3$ .

Строим функцию  $\varphi_x = \exp\left[\sum_{k=1}^3 im_k a_k X_k(x_k)\right]$ . Для нее выполняется



$$p_k = 1 / \frac{\partial \varphi_x}{\partial X_k} = \exp[-\sum_{k=1}^3 im_k a_k X_k(x_k)] / im_k a_k ;$$

$$X_k(x_k) - X_k(x_k^0) = \int_{x_k^0}^{x_k} \frac{\exp[-im_k a_x X_k(x_k)]}{im_k a_k} dx_k$$

Квантовое пространство ОТО оказалось комплексным, колеблющимся в пространстве, каждая координата изменяется в комплексной плоскости с модулем равным гравитационному радиусу с колебанием при движении по окружности, где фаза движения по окружности равна  $X^k \in [-\pi / m_k a_x, \pi / m_k a_x]$ . Прояснилась картина движения электрона в атоме, оказывается каждая координата равна радиусу Бора, умноженному на экспоненту с мнимой фазой. Это соответствует тому, что внутри гравитационного радиуса пространство комплексное. Имеющее физический смысл действительная часть пространства меняется по косинусу, и определяет среднее значение, а мнимая часть определяет среднеквадратичное отклонение и меняется по синусу. Отдельно действительная часть колеблется по косинусу и координата частицы атома или ядра изменяется по закону  $x_k = \cos m_k a_k X_k + \sqrt{2} \sin m_k a_k X_k \sin \omega t, \omega = mc^2 / \hbar$  см. физический смысл комплексного решения [8]. При возведении формулы в квадрат и усреднении по времени получается 1. Модуль комплексного значения координаты равен 1 или в размерном виде равен гравитационному радиусу и определяет средний квадрат координаты согласно физическому смыслу комплексного решения.

Следовательно, если определить волновую функцию частицы по формуле

$$g_{lk} = h_{lk} [1 + \varphi_x(m_1 X_1, m_2 X_2, m_3 X_3)] = h_{lk} [1 + \varphi_y(n_1 Y_1, n_2 Y_2, n_3 Y_3)]$$

она войдет как независимая величина. При малой безразмерной волновой функции получится обычное детерминированное решение. При большом значении волновой функции получим квантовое решение. Умножение на константу этого решения не изменит вида уравнения, так как метрический тензор имеет нулевой порядок в уравнении ОТО. Волновая функция  $\varphi_x$  в уравнение ОТО войдет, как величина

$$\frac{\partial}{\partial x^l a_k \alpha} \left( \frac{1}{1 + \varphi_x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x^k a_k \alpha} \right) = \frac{\partial^2 \ln(1 + \varphi_x)}{\partial x^k \partial x^l (a_k \alpha)^2} = \frac{\partial U_k}{\partial x^l a_k \alpha}, \frac{\partial \ln(1 + \varphi_x)}{\partial x^k a_k \alpha} = \frac{1}{(1 + \varphi_x) a_k \alpha} = \frac{U}{a_k \alpha}; \frac{\partial \varphi_x}{\partial x^k} = 1;$$

$$x^k = z^k / a_k \alpha a_0; a_0 = \frac{\hbar}{mc}, k = 1, \dots, 3$$

и как величина  $\frac{1}{1 + \varphi_x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x^k} \frac{1}{1 + \varphi_x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x^n} = \frac{\partial \ln(1 + \varphi_x)}{\partial x^k} \frac{\partial \ln(1 + \varphi_x)}{\partial x^n} = U^2$ . Для атома водорода постоянная тонкой структуры равна  $\alpha = 1/137$ .

В метрическом тензоре надо подставить  $x_k = \exp(im_k a_k X_k)$  и произвести вычисления метрического тензора, в случае решения Шварцшильда получим постоянные значения метрического тензора так как квадрат модуля радиуса в комплексном пространстве равен 3.

Надо сделать замену безразмерных переменных для учета масштаба координаты  $x^k = z^k / b_k a_0 = z^k / a \alpha \frac{\partial \ln(1 + \varphi_x)}{\partial z^k / a_0} = \frac{\partial \ln(1 + \varphi_x)}{b_k \partial x^k} = \frac{1}{(1 + \varphi_x) b_k}; \frac{\partial \varphi_x}{\partial x^k} = 1$ . Так как решение стационарное  $1/b_0 = U_0$ , что подтвердится в результате вычислений для стационарного решения.

$$\Gamma_{kn}^p = \frac{1}{2(1 + \varphi_x)} g^{pl} \left( \frac{g_{nl}}{b_k} + \frac{g_{kl}}{b_n} - \frac{g_{kn}}{b_l} \right) = \frac{1}{2(1 + \varphi_x)} \left( \frac{\delta_n^p}{b_k} + \frac{\delta_k^p}{b_n} - \frac{g^{pl} g_{kn}}{b_l} \right)$$

$$\Gamma_{pn}^p = \frac{1}{2(1 + \varphi_x)} g^{pl} \left( \frac{g_{nl}}{b_p} + \frac{g_{pl}}{b_n} - \frac{g_{pn}}{b_l} \right) = \frac{1}{2(1 + \varphi_x)} \left( \frac{\delta_n^p}{b_p} + \frac{\delta_p^p}{b_n} - \frac{g^{pl} g_{pn}}{b_l} \right) = \frac{1}{2(1 + \varphi_x)} \frac{4}{b_n}$$

Вычислим символ Кристоффеля, при постоянном метрическом тензоре.

Рассматривается решение Шварцшильда в координатах Пенлеве-Гулстранда (воспользуемся равенством  $x_k = \exp(im_k a_k X_k)$ )

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{r_g}{r}} dT dr - \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2$$

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1 - \frac{r_g}{r} = 1 - \frac{1}{3^{1/2}}, g_{0r} = g^{0r} = \sqrt{\frac{r_g}{r}} = \frac{1}{3^{3/4}};$$

$$g_{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} = -1; T = ct \mp r_g \left(2 \operatorname{arth} \frac{1}{3^{1/4}} - 23^{1/4}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= ct \mp r_g \left( \ln \frac{3^{1/4} + 1}{3^{1/4} - 1} - 2 \cdot 3^{1/4} \right) = ct \mp r_g R(r/r_g) \\
R(r/r_g) &= \ln \frac{\sqrt{r/r_g} + 1}{\sqrt{r/r_g} - 1} - 2\sqrt{r/r_g} = \ln \frac{3^{1/4} + 1}{3^{1/4} - 1} - 2 \cdot 3^{1/4} \\
r^2 &= x_k^* x^k = 3, x_k = \exp(im_k a X_k); dr = d\sqrt{3} = 0
\end{aligned}$$

Где переменная  $X_k$  компенсируется, и остаются постоянные значения метрического тензора.

Рассматривается 6 независимых уравнений общей теории относительности с индексами  $p, q = 1, \dots, 3$  при стационарном решении. Уравнение с индексом 0 выполняется автоматически, что будет следовать из решения. Вычислим тензор

Риччи (надо использовать свойство  $\frac{\partial}{\partial x^p} \frac{1}{1 + \varphi_x} = -\frac{1}{(1 + \varphi_x)^2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x^p} = -\frac{1}{(1 + \varphi_x)^2}, p = 1, \dots, 3$ )

$$\begin{aligned}
R_{pq} &= \frac{\partial \Gamma_{pq}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kp}^q}{\partial x^q} + \Gamma_{pq}^k \Gamma_{km}^m - \Gamma_{pm}^k \Gamma_{qk}^m \\
\frac{\partial \Gamma_{pq}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kp}^q}{\partial x^q} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_p^k}{b_q} + \frac{\delta_q^k}{b_p} - \frac{g^{kl} g_{pq}}{b_l} \right] \frac{1}{b_k} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_n^k}{b_k} + \frac{\delta_k^k}{b_p} - \frac{g^{kl} g_{kn}}{b_l} \right] \frac{1}{b_q} = \frac{1}{b_q b_p} + \frac{g^{kl} g_{pq}}{2b_l b_k} \\
\Gamma_{pq}^k \Gamma_{km}^m &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\delta_p^k}{b_q} + \frac{\delta_q^k}{b_p} - \frac{g^{kl} g_{pq}}{b_k} \right] \frac{4}{b_k} = \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{\delta_p^k}{b_q} + \frac{\delta_q^k}{b_p} - \frac{g^{kl} g_{pq}}{b_l} \right] \frac{4}{b_k} = \frac{2}{b_p b_q} - g_{pq} \frac{g^{kl}}{b_k b_l} = -g_{pq} \frac{g^{kl}}{b_k b_l} + \frac{2}{b_p b_q} \\
\Gamma_{pk}^m \Gamma_{qm}^k &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\delta_k^m}{b_p} + \frac{\delta_p^m}{b_k} - \frac{g^{ml} g_{pk}}{b_l} \right] \frac{\delta_m^k}{b_q} + \frac{1}{4} \left[ \frac{\delta_k^m}{b_p} + \frac{\delta_p^m}{b_k} - \frac{g^{ml} g_{pk}}{b_l} \right] \frac{\delta_q^k}{b_m} - \frac{1}{4} \left[ \frac{\delta_k^m}{b_p} + \frac{\delta_p^m}{b_k} - \frac{g^{ml} g_{pk}}{b_l} \right] \frac{g^{kn} g_{qm}}{b_n} = \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{4}{b_p b_q} + \frac{1}{b_p b_q} - \frac{1}{b_p b_q} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b_p b_q} + \frac{1}{b_p b_q} - g_{pq} \frac{g^{km}}{b_k b_m} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b_p b_q} + g_{pq} \frac{g^{kn}}{b_k b_n} - \frac{1}{b_p b_q} \right) = -g_{pq} \frac{g^{kn}}{2b_k b_n} + \frac{3}{2b_p b_q}
\end{aligned}$$

Суммируя эти выражения, получаем так как для стационарного решения

$$U_k = U, k = 1, \dots, 3, U_0 = 0$$

$$R_{pq} = \frac{3}{2b_p b_q (1 + \varphi_x)^2} = U^2 = \frac{1}{(1 + \varphi_x)^2}; b_p = \sqrt{\frac{3}{2}}, b_0 = \infty.$$

Рассмотрение не стационарного решения  $1/b_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 + \varphi_x)U_0$  невозможно так как в этом случае  $x_0 \neq \exp(im_0 a_0 X_0)$  время растёт и необходимо знание ядерного потенциала. Для роста времени необходимо комплексное значение  $a_0$ , которое не получается из решения Шварцшильда уравнения ОТО.

Ядро атома водорода при этом надо рассматривать как элементарную частицу с зарядом  $r_g/2 = \frac{q^2}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{137e^2}{mc^2}$ ,  $q = e\sqrt{137}$ . Назовём классической постоянной взаимодействия для ядра атома водорода равную  $\alpha = \frac{q^2}{\hbar c} = 1$ . Для констант  $a_k, b_k$  оставим название константы взаимодействия, сильного или электромагнитного. Без слова классические. Но постоянная взаимодействия не зависит от количества нуклонов. Поэтому ядро атома водорода определяет постоянную взаимодействия. Для протонов надо учитывать энергию притяжения электронов и постоянная взаимодействия для них равна  $\alpha = 1 - Zm_e/(137.023m_p)$ . Классическая постоянная сильного взаимодействия определена.

Константу сильного взаимодействия, определим из равенства собственной энергии электрона, но с классической постоянной взаимодействия

$$\frac{m^2 c^4}{E^2} = 1 + \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{l_k^2 - \alpha^2} + m_k + 1} + \frac{\alpha}{\sqrt{l_k^2 - \alpha^2} + n_k + 1} \right]^2 = \left( 1 + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{1}{a^2}$$

Получаем константу сильного взаимодействия, зависящую от целых чисел

$$a^2 = \frac{\sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2}{\sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{l_k^2 - \alpha^2} + m_k + 1} + \frac{\alpha}{\sqrt{l_k^2 - \alpha^2} + n_k + 1} \right]^2}. \quad (4.1)$$

Но решение уравнения ОТО даёт другой результат для константы сильного взаимодействия.

Пространство вращательных и колебательных степеней свободы оказалось 6 мерным. В самом деле из уравнения ОТО никак нельзя получить формулу (4.1). Это говорит о том, что константа сильного взаимодействия равна  $a^2 = 3/2\alpha^2$ .

$$E_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\alpha}{m_k + l_k + 1} + \frac{\alpha}{n_k + l_k + 1} \right)^2}}; \alpha = \sqrt{2/3} \quad (4.2)$$

Структура постоянной  $a$  не зависит от потенциала сильного взаимодействия и аналогична электромагнитному взаимодействию. Отмечу, что описана среда ядра атома, и она автоматически группируется в кварки и глюоны, но для описания спектра ядра атома, достаточно описание среды, а не ее свойство образовывать элементарные частицы и поля. При этом среда см. [1], образующая электроны и электромагнитное поле, отличается только плотностью, что приводит к разным константам взаимодействия, и по аналогичному механизму образует кварки и глюоны, но из среды с большей плотностью.

Изменяется квантовое число  $n$  от фиксированного главного квантового числа  $N$ , равного целому числу  $N$  до бесконечности, при этом фиксированное главное квантовое число  $N$  изменяется от 1 до 4. Квантовое число  $n$  общее с вращательными и колебательными степенями свободы. При этом изменяется главное квантовое число  $N$ , от 1 до 4 причем вариантов с главным квантовым числом  $N$  имеется  $N^4$ . При условии  $N=1$  имеется один нуклон, при условии  $N=2$  имеется 16 нуклонов, при условии  $N=3$  имеется 81 нуклонов, при условии  $N=4$  имеется 256 нуклонов. Количество состояний, определяет количество нуклонов. Итого граничные состояния 1,17,98, 354 нуклонов.

Ядро железа имеет 58 нуклонов, это среднее между 17 и 98 нуклонами. Поэтому при главном квантовом числе, равном  $N=3$  имеем 26 протонов и 32

нейтрона. Разложение имеет вид  $Z = \sum_{n=0}^3 \alpha_n; \alpha_n = \left[ \frac{Z - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k}{4-n} \right] (4-n); n = 0, \dots, 3; \alpha_{-1} = 0$

Имеем формулу спектра

$$[1/(1+\alpha_3)+1/(1+\alpha_2)]^2 + [1/(1+\alpha_1)+1/(1+\alpha_0)]^2 = [1/1+1/(1+2 \cdot 1)]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 6)]^2$$

протонов и формулу для нейтронов  $[1/1+1/1]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 8)]^2$ . Всего для каждого нуклона 4 варианта позиций. Ядро свинца имеет главное квантовое число  $N = 4$  при 208 нуклонах и находится между 98 и 354 нуклонами. Оно содержит 82 протона и 126 нейтронов. При этом определялись квантовые числа для 4 состояний протонов  $[1/1+1/(1+2 \cdot 1)]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 20)]^2$ ,  $2 \cdot 1 + 4 \cdot 20 = 82$  и 4 состояния для нейтронов  $[1/1+1/(1+2 \cdot 1)]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 31)]^2$ ,  $2 \cdot 1 + 4 \cdot 31 = 126$ . Также исследуется элемент диспрозий  $Dy, A = 160, Z = 66, N = 94$  протоны имеют следующую структуру  $[1/1+1/(1+2 \cdot 1)]^2 + [1/1+1/(4 \cdot 16)]^2$ , а нейтроны  $[1/1+1/(2 \cdot 1)]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 23)]^2$ . Также исследуется элемент  $Hf, A = 180, Z = 72, N = 108$  протоны имеют следующую структуру  $[1/1+1/1]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 18)]^2$  а нейтроны  $[1/1+1/1]^2 + [1/1+1/(1+4 \cdot 27)]^2$ . Ядро углерода имеет квантовое число  $N = 2$ , оно имеет 11 нуклонов, 6 протонов и 5 нейтронов, один нейтрон удален из ядра в данном измерении собственной энергии ядра. При этом имеем следующее распределение квантовых чисел для 4 состояний  $[1/(1 \cdot 1)+1/1]^2 + [1/(1+3 \cdot 2)+1/1]^2$  протонов и распределение квантовых чисел для 2 состояний нейтрона, два состояния не заняты  $[1/1+1/(1+2)]^2 + [1/(1+3)+1/1]^2$ . Кроме того, к величине  $n$  добавляется суммарный момент импульса.

В случае электрона в много электронном атоме надо разлагать заряд

электронов в атоме по формуле  $Z = \sum_{n=0}^3 \alpha_n; \alpha_n = \left[ \frac{Z - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k}{4-n} \right] (4-n); n = 0, \dots, 3; \alpha_{-1} = 0$ ,

где в квадратных скобках используется целая часть комплексного числа. Имеем формулу энергии электронов в атоме

$$E_{nl} = \frac{Zm_e c^2}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta_Z + \alpha_3} + \frac{\alpha}{\beta_Z + 1 + l_Z + \alpha_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{\beta_Z + 1 + l_Z + \alpha_1} + \frac{\alpha}{\beta_Z + 1 + l_Z + \alpha_0} \right)^2 + \frac{4\alpha^2}{(\beta_Z + n)^2} \right]}}$$

$$\alpha = \frac{n}{137(\sqrt{(l+1)^2 - 1/137^2} + n_r)3^{0.5}} \cong \frac{1}{137 \cdot 3^{0.5}}, n = n_r + l + 1$$

$$\beta_Z = \begin{cases} 1, Z \in [1,2] \\ 2, Z \in [3,10] \\ 3, Z \in [11,18] \\ 4, Z \in [19,36] \\ 5, Z \in [37,54] \\ 6, Z \in [55,86] \end{cases}; l_Z = \begin{cases} Z-1, Z \in [1,2] \\ Z-3, Z \in [3,10] \\ Z-11, Z \in [11,18] \\ (Z-19)/2, Z \in [19,36] \\ (Z-37)/2, Z \in [37,54] \\ (Z-55)/2, Z \in [55,86] \end{cases}$$

Эта формула для атома водорода совпадает с известной формулой квантовой электродинамики, так как  $\alpha_k = 0, k = 0, \dots, 2, \alpha_3 = 1$  для атома водорода. Для многоэлектронного атома формула описывает его спектр. Понятны скачки энергии ионизации при росте главного квантового числа. Величина  $\alpha_2$  переходит в величину  $\alpha_1$ , которая вдвое больше и энергия ионизации уменьшается.

Кроме того, надо учесть энергию взаимодействия частицы с остальными частицами. Она равна

$$\Delta E_{Zl} = \frac{(Z-1)m_e c^2 0.5}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{\beta_Z + 1} + \frac{\alpha}{\beta_Z + 1 + 2l_Z} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{\beta_Z + 1 + 2l_Z} + \frac{\alpha}{\beta_Z + 1 + 2l_Z} \right)^2 + \frac{4\alpha^2}{(\beta_Z - 1 + 2l_Z + n)^2}}}$$

Каждая частица из пары имеет орбитальный момент, и орбитальные моменты пары складываются.

Представлена зависимость энергии ионизации от количества электронов в атоме.

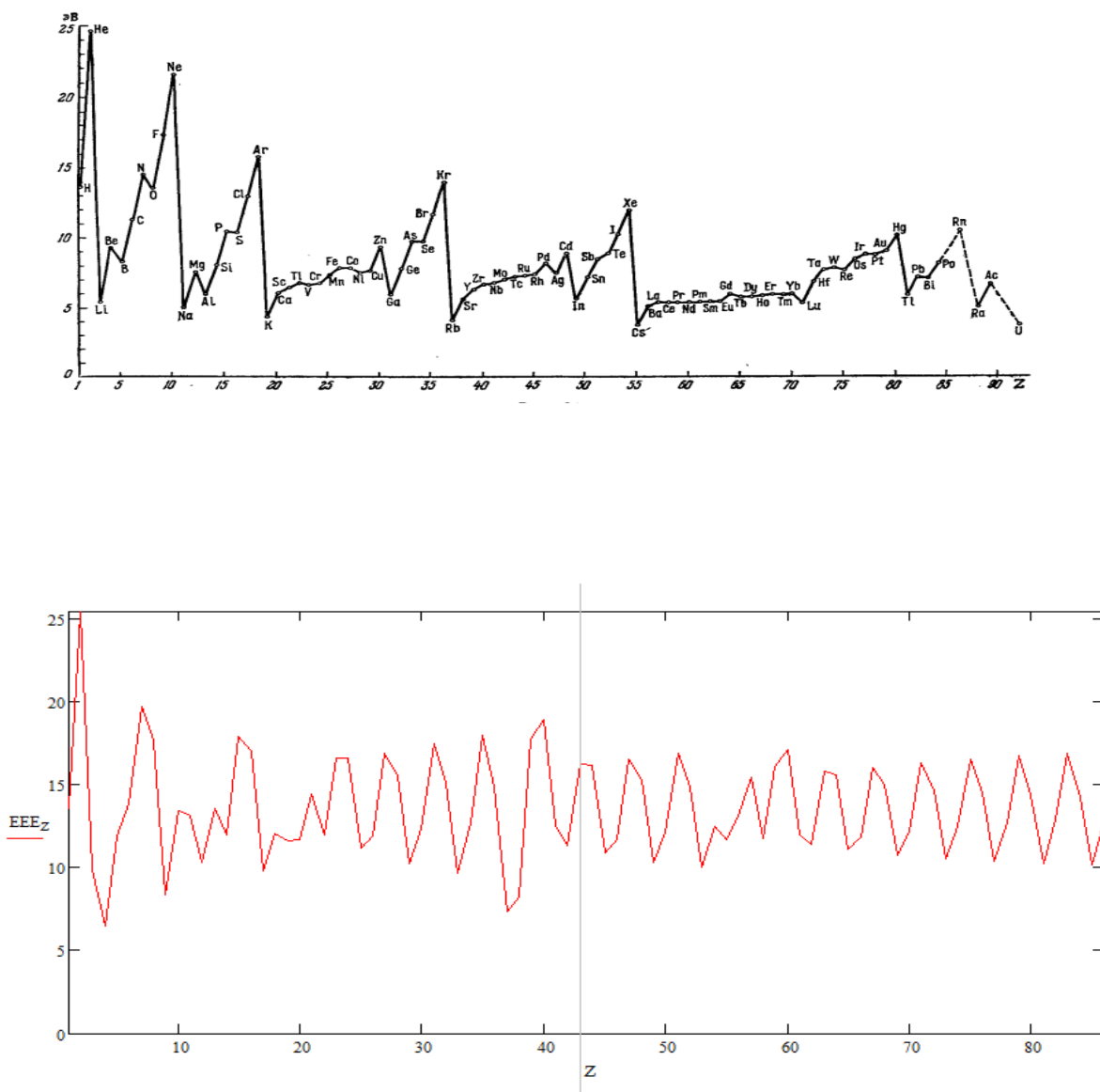


Рис.1 График потенциала ионизации, сверху экспериментальный, внизу подсчитанный по формулам.

Приведен график энергии ионизации, являющейся разностью значений энергии  $\Delta E_{n+1} = E_n - E_{n+1}$ . Чтобы получить следующую точку нужно к потенциалу ионизации добавить следующий потенциал ионизации  $EEE_{n+1} = \Delta E_n + \Delta E_{n+1} - E_1; n = 2, \dots, EEE_1 = \Delta E_0 + \Delta E_1, EEE_2 = \Delta E_1 + \Delta E_2 - E_1/2$  при этом всем элементам  $\Delta E_n$ , начиная со второго добавляется величина  $E_1/2$  Получилось правильное начальное значение энергии атома водорода 13.6 эВ. Разность уровней энергии гелия и водорода как это следует из рисунка равна 11.4 эВ. Данный график получается добавлением потенциала ионизации к значению



предыдущего см. [22]§73 и значение энергии ионизации для атома гелия на экспериментальном графике совпадает с вычисленным.

|    |        |  |      |
|----|--------|--|------|
|    | 0      |  | 0    |
| 0  | 0      |  | 0    |
| 1  | 13.599 |  | 13.6 |
| 2  | 25.506 |  | 25   |
| 3  | 9.857  |  | 5    |
| 4  | 6.517  |  | 9    |
| 5  | 11.897 |  | 7    |
| 6  | 13.9   |  | 11   |
| 7  | 19.758 |  | 15   |
| 8  | 17.711 |  | 13.5 |
| 9  | 8.387  |  | 16   |
| 10 | 13.469 |  | 22   |
| 11 | 13.166 |  | 5    |
| 12 | 10.321 |  | 7    |
| 13 | 13.614 |  | 5.5  |
| 14 | 12.017 |  | 7    |
| 15 | 17.912 |  | 11   |
| 16 | 17.056 |  | 10.5 |
| 17 | 9.82   |  | 13   |
| 18 | 12.096 |  | 16   |
| 19 | 11.651 |  | 5    |
| 20 | 11.693 |  | 7.5  |

Рис.2 Слева расположены значения энергии, определяющие ионизацию электрона при теоретически вычисленных значениях, а справа оцифрованный экспериментальный график. График построен таким образом, что ошибка вычисления накапливается.

Ошибочным является значение теоретического графика при количестве электронов 3 и 4, их надо переставить местами. Это приведет к повышению последующих значений графика на 6 Мэв. Занижено значение теоретического графика при количестве электронов 9 и 10, что тоже приведет к смещению графика. Это точки около нового периода в строении атома. Правильно описан максимум энергии при количестве электронов 7 и 15, но это значения сдвинуты предыдущими точками. Остальные точки меняются почти синхронно с учетом сдвига.

Помимо вычисления графика определена энергия атома гелия. Она равна

$$E = -\frac{3}{2} \left[ \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{4}{(1+1)^2} \right] \frac{1}{137^2 3}}} - m_e c^2 \right] 4 / \left( 1 + \frac{m_e}{m_p} \right) +$$

$$+ \frac{m_e c^2 / 2}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{4}{(1+3)^2} \right] \frac{1}{137^2 3}}} - m_e c^2 / 2 = 79.14 \text{ Mev} = 2.9098 a.e.$$

Данное значение энергии атома гелия совпадает с экспериментом.

Классический предел энергии протона  $E_p = mc^2 = 938,3 \text{ Мэв}$ . Алгоритм считался для ядра железа с количеством нуклонов равным  $A = 58$ . Отношение массы нижнего кварка к верхнему кварку равно  $\delta_0$ . Если имеем два нижних кварка и один верхний кварк, то отношение их масс  $2\delta_0$  к 1. Тогда доля массы верхнего кварка равна  $\delta = \frac{1}{2\delta_0 + 1}$  Если имеем нижний кварк и верхних кварк,

причем два кварка неразличимы, то коэффициент пропорциональности равен

$\delta = \frac{1}{\delta_0 + 1}$  или  $\delta = \frac{\delta_0}{\delta_0 + 1}$  и получаем либо протон, либо нейтрон. В случае

различимости кварков коэффициент пропорциональности равен  $\delta = \frac{1}{2\delta_0 + 1}$ ,

$\delta = \frac{\delta_0}{2\delta_0 + 1}$ ,  $\delta = \frac{\delta_0}{\delta_0 + 2}$ ,  $\delta = \frac{1}{\delta_0 + 2}$  с определяемым весом каждого кварка для разных

нуклонов. Возможно 2 варианта образования нуклона. Образование протона возможно 2 способами из двух нижних кварков и одного верхнего udd. Тогда вычисленную энергию по формуле (4.2) для образования протона надо брать с

$$\text{весом } \alpha = \frac{2 + \delta_0^2}{(\delta_0 + 2)^2} m_p; E = \alpha E_p \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{2}{(\delta_0 + 2)^2} m_p; \beta = \frac{\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n; E = \alpha E_p + \beta E_n.$$

Образование нейтрона возможно 2 способами из двух верхних кварков и одного нижнего uud. Тогда вычисленную энергию по формуле (4.2) для образования

$$\text{нейтрона надо брать с весом } \beta = \frac{1 + 2\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n; E = \beta E_n \quad \text{или}$$

$$\alpha = \frac{1}{(\delta_0 + 2)^2} m_p; \beta = \frac{2\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n; E = \alpha E_p + \beta E_n. \text{ По спектру можно определить какой}$$

нуклон и кварк взаимодействовал и можно оценить отношение масс нижнего и верхнего кварка.

$$E_{n,3} = E_n - E_3; n = n_5 = n_6 = m_5 = m_6$$

$$E_{mnl,p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{2}{3}}}, E_{mnl,n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{2}{3}}}. \\ l_p = 5; l_n = 5$$

Причем так как произошло измерение энергии ядра надо использовать формулу для различающихся частиц. масса излучающих частиц считалась по формуле

$$\alpha = \frac{2}{(\delta_0 + 2)^2} m_p; \beta = \frac{\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n. \text{ При этом определялась энергия двух состояний с}$$

весовой функцией  $E_n = E_{n+5,p} \alpha + E_{n+5,n} \beta$ . Основное состояние энергии равно  $E_3$ .

Квантовые числа получены при 26 протонах и 32 нейтронах.

| N                          | 3 | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E_n$ , МэВ теория         | 0 | 0.814 | 1.412 | 1.862 | 2.211 | 2.485 | 2.706 | 2.805 |
| $E_n$ , МэВ<br>Эксперимент | 0 | 0.81  | 1.67  | 2.13  | 2.26  | 2.6   | 2.78  | 2.87  |

Формула считается с ошибкой 2-10%, причем ошибка с ростом квантового числа уменьшается. Экспериментальные значения взяты из интернета [15]. Алгоритм

считался для ядра свинца с количеством нуклонов равным  $A = 208$ . В формуле расчета изменяется только одно из квантовых чисел

$$E_{n,4} = E_n - E_4; n = n_5 = n_6 = m_5 = m_6$$

$$E_{mnl,p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{2}{3}}}, E_{mnl,n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{2}{3}}}$$

$$l_p = 4; l_n = 4$$

При этом определялась энергия двух состояний с весовой функцией

$$E_n = E_{n+4,p} \alpha + E_{n+4,n} \beta, \alpha = \frac{2}{(\delta_0 + 2)^2} m_p; \beta = \frac{\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n.$$

Основное состояние энергии равно  $E_4$ . Квантовые числа получены при 82 протонах и 126 нейтронах.

Экспериментальные данные взяты из [17].

| N                       | 4 | 5     | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-------------------------|---|-------|------|------|------|------|------|
| $E_n$ , МэВ теория      | 0 | 0.694 | 1.21 | 1.61 | 1.92 | 2.16 | 2.36 |
| $E_n$ , МэВ эксперимент | 0 | 0.79  | 1.42 | 1.56 | 2.01 | 2.47 | 2.51 |

Все экспериментальные данные приведены без указания ошибки эксперимента.

Точность вычисления 2-10%.

Были сравнены теория и экспериментальные данные при излучении нейтрона углеродом с количеством нуклонов равным  $A = 12$ . Основное состояние энергии равно  $E_2$ . Экспериментальные данные взяты из [16].

$$E_{n,2} = E_n - E_2; n = n_5 = n_6 = m_5 = m_6$$

$$E_{mnl,p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{2}{3}}}, E_{mnl,n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2 \frac{2}{3}}}$$

$$l_p = 1; l_n = 1$$

Формулы описывают 6 протонов и 5 нейтронов, один нейтрон был излучен. Если для Рb, Fe скорости d, u кварков совпадали и отношение их масс не зависело от скорости, то в случае углерода скорости d, u кварков отличаются, скорость d

кварка выше чем скорость и кварка и зависят от квантового  $n$ . Отношение энергии нижнего кварка к энергии верхнего кварка, равно

$$\delta_n = \frac{m_d \sqrt{1 - V_{un}^2 / c^2}}{m_u \sqrt{1 - V_{dn}^2 / c^2}} = 16 \left(1 - \frac{9}{n^2}\right) + 3 \frac{9}{n^2}. \quad \text{Весовая функция равна}$$

$$E_n = E_{n+3,p} \alpha_n + E_{n+3,n} \beta_n; \alpha_n = \frac{1}{(\delta_n + 2)^2} m_p; \beta_n = \frac{2\delta_n^2}{(2\delta_n + 1)^2} m_n; \text{Значение энергии зависит от}$$

скорости кварков.

| N                       | 2 | 3     | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-------------------------|---|-------|------|------|------|------|------|------|
| $E_n$ , МэВ теория      | 0 | 4.453 | 7.8  | 9.78 | 11.1 | 12   | 12.6 | 13.1 |
| $E_n$ , МэВ эксперимент | 0 | 4.44  | 7.65 | 9.64 | 10.8 | 11.7 | 12.7 | 13.3 |

У основного состояния ядра углерода главное квантовое число равно  $N = 2$ .

Какова же ориентировочная точность расчета по предлагаемой формуле. Радиационные поправки определяются временем жизни виртуальных частиц, т.е.  $\tau \sim \hbar / (mc^2)$ . Константа сильного взаимодействия по порядку равна 1, и в расчетах точности определения энергии входит как множитель, равный 1. Получается что точность аппроксимации энергия ядра равна отношению массы электрона к массе протона  $\frac{m_e}{m_p} \sim 0.05\%$ . Но точность аппроксимации данных формул гораздо меньше. Дело в том, что константа сильного взаимодействия, это не малый параметр, и формулы квантовой электродинамики по определению радиационной ошибки неверные, поэтому ошибка, с которой вычислена энергия ядра может достигать  $\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \sim 2.33\%$ . Кроме того, данная формула не учитывает мгновенное состояние спектра, которое может отличаться от вычисляемой средней энергии спектра.

По предлагаемым формулам можно определить энергию ядра в зависимости от количества протонов и нейтронов, и значит определить энергию связи ядра.

энергию, которую надо затратить для удаления нуклона и альфа частицы. Энергия необходимая для удаления протона или нейтрона равна

$$\Delta E_p = 2E(Z, N) - E(Z - 1, N) - E(1, N)$$

$$\Delta E_n = 2E(Z, N) - E(Z, N - 1) - E(Z, 1)$$

Для отделения альфа частицы энергия равна

$$\begin{aligned} \Delta E &= [E(Z, N) - E(Z, N)] - [E(Z - 2, N - 2) - E(Z, N)] - [E(2, 2) - E(Z, N)] = \\ &= 2E(Z, N) - E(Z - 2, N - 2) - E(2, 2) \end{aligned}$$

Энергия системы имеет абсолютное значение. Физический смысл имеет относительное значение энергии. Из относительного значения энергии ядра вычитаются относительное значение энергии образовавшегося ядра, минус относительная величина энергии вылетевшей частицы. Но энергия отделения определится не однозначно, масса участвующей в процессе отделения частицы не является единственной, существует две разных массы. Энергия для удаления протона соответствует два положительных значения энергии  $\Delta E_p = 10.9 \text{ Мев}; 3.75 \text{ Мев}$ .

Вычислено положительное значение энергии, но существует и отрицательное значение энергии  $E_{n,p} = E_n - E_p, p = 0, \dots, 4$  при условии  $n \leq p$ . Оно считается по эмпирической приближенной формуле

$$\begin{aligned} E_{n,p} = E_n - E_p = E_0 - E_j; E_j &= -\frac{\hbar^2 j(2j+1)A^{5/3} 938.3 \text{coef}^2 (0.217 + 125.28/A)}{p(2p+1)}, \\ \text{coef} &= \frac{r_p \beta}{2v - i\hbar/m} = 5.466 \cdot 10^{-4}; \beta = (2v - i\frac{\hbar}{m}) \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^l} = (2v - i\frac{\hbar}{m}) \frac{\text{coef}}{r_p}; \\ \text{coef} &= r_p \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^l} = 5.466 \cdot 10^{-4}; A \sim 170; r_p = \frac{e^2}{m_p c^2}; j = p - n; p > 1, j, n = 0, \dots, p \end{aligned}$$

Найдем среднее значение коэффициента  $\text{coef}$ . Волновая функция для ядра атома

равна  $\frac{\partial \ln \psi}{\partial y^l} = \frac{\partial \ln(1 + \varphi_x)}{\partial y^l} = \frac{1}{(1 + \varphi_x)r_0}, x^l = y^l / r_0, r_0 = 1.4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ . Среднее значение

равно

$$\left\langle \frac{1}{1+\varphi_4} \right\rangle = \int_0^{2\pi/m_1 a} \int_0^{2\pi/m_2 a} \int_0^{2\pi/m_3 a} \frac{m_1 m_2 m_3 a^3}{(2\pi)^3} \frac{dX_1 dX_2 dX_3}{1 + \exp(i \sum_{k=1}^3 m_k a X_k)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-i\varphi/2)}{2 \cos \varphi/2} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{(2\pi)^3}$$

$$= 0.5, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3; \text{coef} = \frac{r_p}{r_0} = 5.466 \cdot 10^{-4};$$

Величина постоянной взаимодействия в формулах для  $E_{n,p} \leq p$  считается по формуле  $\delta = A^{5/6} \frac{\text{coef}}{1.4979 + 30.38/A}$ . Формулы имеют 4 варианта значений, два для образования протона, и два для образования нейтрона. Данные эксперимента взяты из книги [18]. Приведем вычисленные данные для диспрозия  $Dy$

|                  |   |    |     |     |     |
|------------------|---|----|-----|-----|-----|
| N                | 4 | 3  | 2   | 1   | 0   |
| J                | 0 | 2  | 4   | 6   | 8   |
| Эксперимент,Кев  | 0 | 87 | 284 | 582 | 972 |
| $E_p - E_n$ ,Кев | 0 | 79 | 211 | 452 | 972 |
| $E_0 - E_j$ ,Кев | 0 | 71 | 257 | 558 | 972 |

Приведем данные для  $Hf$

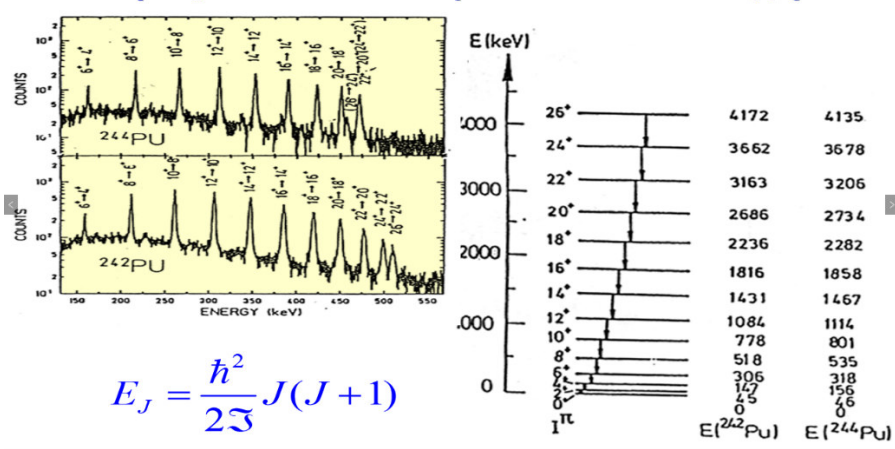
|                  |   |    |     |     |      |
|------------------|---|----|-----|-----|------|
| N                | 4 | 3  | 2   | 1   | 0    |
| J                | 0 | 2  | 4   | 6   | 8    |
| Эксперимент,Кев  | 0 | 93 | 307 | 637 | 1079 |
| $E_p - E_n$ ,Кев | 0 | 88 | 234 | 502 | 1079 |
| $E_0 - E_j$ ,Кев | 0 | 79 | 286 | 619 | 1080 |

Хотя данные эксперимента и 5 строки совпадают лучше, чем данные эксперимента и 4 строки, это следует отнести к погрешности эксперимента, которая толковалась по известной формуле  $2j(2j+1)$ . Точность 4 строки должна быть выше точности 5 строки. Кроме того, при интерпретации экспериментов для диспрозия допускалось квантовое число  $2j=10$ , что вообще никуда не годится, квантовое число должно быть не больше 8.

Кроме того, имеются противоречия в источнике [19] раздел «Вращательные спектры без спиновых ядер». Слева расположена

экспериментальная картинка, которая ограничивает все значения спектра ядра атома величиной 500Кев. Но справа получен спектр ядер, достигающий 4000Кев. По-видимому был вычислен момент инерции основного состояния ядра атома и было экстраполировано значение энергии на все значения орбитального момента инерции  $2j = 26$ . Это не правильная экстраполяция, спектр ограничен значением  $2j = 8$ , и различаются только значением  $2p = 2,4,6,8; 2j = 2,4,6,8$ .

### Вращательные спектры бесспиновых ядер



Так как уравнение ОТО нелинейное, оно описывает 6 компонент вращательного и колебательного состояния, отдельно для протона и нейтрона. При этом угол и координата не определяется, так как описывается среда. Имеется непрерывное распределение метрического тензора, умноженного на положительную действительную часть суммы единицы плюс волновая функция. По ним считается энергия ядра. Это более общее описание системы, чем линейное уравнение квантовой механики электронов в атоме, с малой постоянной тонкой структуры.

### Выводы

Получено значение констант, входящих в волновую функцию, с помощью нелинейного уравнения ОТО. Это решение описывает свойства среды, как частный случай электрона в атоме и описывается ядро атома с вычисленной константой сильного взаимодействия,



Итого имеем формулу для энергии нуклонов в ядре

$$E = \alpha_{\Sigma}(E_{pmnl} - E_{pN}) + \beta_{\Sigma}(E_{nmnl} - E_{nN})$$

$$E_{pmnl} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2}} \frac{2}{3}; E_{nmnl} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{m_k + l_k + 1} + \frac{1}{n_k + l_k + 1} \right)^2}} \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{\Sigma} = \begin{cases} \alpha_p \delta, n < N \\ 0, n = N \\ \alpha_p, n > N \end{cases}; \alpha_p = \begin{cases} \frac{2 + \delta_0^2}{(\delta_0 + 2)^2} m_p; \\ \frac{2}{(\delta_0 + 2)^2} m_p(1); \\ \frac{1}{(\delta_0 + 2)^2} m_p(2), \end{cases} \beta_{\Sigma} = \begin{cases} \beta_n \delta, n < N \\ 0, n = N \\ \beta_n, n > N \end{cases}; \beta_n = \begin{cases} \frac{1 + 2\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n; \\ \frac{\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n(1); \\ \frac{2\delta_0^2}{(2\delta_0 + 1)^2} m_n(2); \end{cases}$$

$$\delta_0 = \frac{m_u}{m_d} = \frac{4.27}{2.2}$$

Формула проверенная для ядра C,Fe,Pb при условии  $n > N$ , и для ядер Hf.Dy проверена при условии  $n < N$ . Для остальных элементов возможны отклонения.

При условии  $n > N$  получена точная формула для энергии ядра, при условии  $n < N$  формула получена с помощью экстраполяции, и возможны отклонения.

## 5. Детерминированная редукция микромира

### или новые идеи в квантовой механике

Связь решений уравнения ОТО, Навье-Стокса, волнового уравнения и уравнений квантовой механики говорит о детерминированности уравнений квантовой механики в комплексном пространстве. К этому добавляются единые уравнения электромагнитного, звукового и гравитационного поля, описываемые уравнением Максвелла см. [25]. В связи с соотношением неопределенности имеется связь между мнимыми частями этих решений. но в комплексном

пространстве нельзя говорить о вероятности определенного процесса, волновая функция имеет другой физический смысл, описывая потенциальное решение детерминированного решения уравнения Навье-Стокса в комплексном пространстве. В связи с этим построено детерминированное решение квантовой механики с точностью до задания начальных данных из соотношения неопределенности. Никакой вероятности процессов не существует, они определяются детерминированным образом, только надо уметь считать. Эти утверждения основаны на построении непрерывной во времени волновой функции, определяющей какое из стационарных волновых функций будет реализованы. Но для этого необходим переход в комплексное пространство. Опишем построение этой волновой функции, оказывающейся равной в определенный момент времени стационарной волновой функции с определяемой энергией. Стационарной волновой функцией назовем волновую функцию с постоянной энергией. Детерминированные соотношения квантовой механики построены с помощью волновой функции, зависящей от времени с кинетической энергией, зависящей от времени, в комплексном пространстве с использованием физического смысла комплексной кинетической энергии.

Уравнения Навье-Стокса имеют решение - координаты положения равновесия, являющиеся коэффициентами  $\alpha$  у функций, описывающих скорость потока  $V_n(x_1, x_2, x_3) = \alpha g_n(x_1, x_2, x_3)$ , где за основу взято ламинарное решение уравнения Навье-Стокса. Турбулентное решение соответствует комплексному значению коэффициента  $\alpha$ . Действительное решение уравнения Навье-Стокса в случае турбулентного, комплексного режима стремится к бесконечности см. [4] раздел 2 теорема 1 стр. 50-53. Соответственно решение дифференциального уравнения Навье-Стокса определяет линию тока см. [11]

$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \text{Re } V_n(x_1, x_2, x_3) + \text{Im } V_n(x_1, x_2, x_3) \sin \text{Im } V_n(x_1, x_2, x_3) t / a.$$

В результате решения этого дифференциального уравнения определится функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ , где начальные условия комплексные, чтобы обеспечить комплексные импульс и энергию. Волновая функция равна

$\psi_n = \exp[im \int_0^t \mathbf{V}_n^2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) dt / \hbar]$  и кинетическая энергия системы комплексная,

зависит от начальных условий и изменяется со временем. Эта волновая функция определяется из связи решения уравнения Шредингера и Навье-Стокса

$$V_l = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^l}.$$

Но если стационарное решение уравнения Шредингера ламинарное, его число

Рейнольдса действительное и равно  $R_r = \frac{V_r a_0}{\nu} = \frac{2m V_r a_0}{i\hbar} = -2a_0 \left( \frac{\partial R_{nl}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \right); a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ ,

то зависящее от времени решение уравнения Шредингера комплексное с комплексной скоростью уравнения Навье-Стокса из-за комплексных начальных условий. Комплексные начальные условия определяются степенью шероховатости решения  $\mathbf{x}_c^0 = \mathbf{x}_r^0 (1 + i \frac{\delta}{l})$  и их мнимая часть начальных данных

может быть только больше степени шероховатости. Мнимая часть определяет среднеквадратичное отклонение решения, и значит решение, содержащее мнимую часть вероятностное.

Волновая функция, использующая формулу для комплексного турбулентного решения см. [11], равна

$$\begin{aligned}
\psi_n &= \exp\left[im \int_0^t V_n^2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) dt / \hbar\right] = \\
&= \exp\left[i\hbar \int_0^t R_n^2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) dt / 4ma^2\right] = \\
&= \exp\left[-i\hbar \int_0^t \{[\operatorname{Re} R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]^2 - [\operatorname{Im} R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]^2\} dt / 4ma^2 + \right. \\
&\quad \left. + \hbar \int_0^t 2 \operatorname{Re} R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \operatorname{Im} R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sin\left[\int_0^t \operatorname{Re} R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \operatorname{Im} R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) dtv / a^2 + \operatorname{Im} \varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\right] dt / 4ma^2\right]
\end{aligned}$$

и кинетическая энергия системы комплексная, зависит от начальных условий и изменяется со временем. В данном случае происходит умножение комплексной скорости на мнимую единицу, поэтому мнимая часть не теряет мнимую единицу.

В результате модуль волновой функции равен

$$\begin{aligned}
|\psi| &= \exp\left[\hbar \int_0^t 2R_{cr}^2 \operatorname{Re} g_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \operatorname{Im} g_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sin\left[\int_0^t R_{cr}^2 \operatorname{Re} g_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \operatorname{Im} g_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) dtv / a^2 + \operatorname{Im} \varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\right] dt / 4ma^2\right]
\end{aligned}$$

Где используются комплексные начальные данные. Собственная энергия равна  $E_n(t) = -\hbar^2 R_{cr}^2 \operatorname{Re} g_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \operatorname{Im} g_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) / ma^2$  и в случае действительных начальных данных равна нулю. Получается непрерывное излучение и поглощение энергии.

Существует счетный набор исходных данных, исходя из которых частица придет к одной из возможных значений собственной энергии, собственной функции и трем координатам. Существует континуум наборов начальных данных, что волновая функция будет колебаться, не приходя в стационарное решение и не излучит энергию. Можно для каждого атома вычислить моменты времени перехода к определенному стационарному состоянию и излучению энергии. Причем начальный момент времени у этого процесса разный, и все

атомы одного элемента реагируют одинаково. Т.е. вводится детерминизм в процесс изменения энергии атомом.

В случае действительных начальных данных волновая функция равна

$$\psi = \exp\left\{i\hbar \int_0^t [\text{Re } R_n(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]^2 dt / m^2 a^2\right\}$$

и определяется волновая функция по модулю равная 1.

Приближение плоской волны, которое используют в квантовой электродинамике, подразумевает скачкообразное изменение энергии и импульса на излучение. При этом решение рвется и в скачке не существует. Но это не значит, что предлагаемое решение описывает скачок, необходимы комплексные начальные условия, т.е. наличие шероховатости. Шероховатости в квантовом описании плоской волны существуют, значит процесс скачка описывается предлагаемым решением, так как есть комплексные начальные условия. Но как скачок переходит к следующему значению собственной энергии или перескакивает через собственные значения энергии.

Реализуются все возможные начальные данные. Но только некоторые из них соответствуют определенной собственной волновой функции с определенной энергией и тремя координатами. Причем имеется 3 комплексных начальных условия, итого 6 констант, по ним определится модуль волновой функции, значение энергии определенного стационарного состояния, и значение координат. Первая производная по времени от волновой функции определится из дифференциального уравнения в случае релятивистского уравнения Клейна-Гордона. Произойдет переход на новый уровень энергии. Решения будет достигнуто в порядке возрастания времени. Но возможен переход на действительный уровень энергии, тогда действительные координаты будут ему соответствовать и дальнейший рост решения приведет к бесконечности решения, т.е. к новому излучению. Будут использованы решения с другими начальными данными. Существуют комплексные начальные данные приводящие к

стационарному решению уравнения Шредингера. Но существуют и другие комплексные начальные условия, описывающие непрерывное решение уравнения Шредингера с одной зависящей от времени волновой функцией и одним значением энергии, зависящим от времени.

Проверкой правильности идеи о построении волновой функции с переменной энергией является набор свойств частиц вакуума. Каждая частица вакуума определенного ранга мультиполя, описывает один уровень энергии с главным квантовым числом, равным рангу мультиполя, описывающего частицу вакуума. Для каждой частицы вакуума имеются свои начальные условия волновой функции, их описывающей. Начальные условия определяются конечной структурой мультиполя. Волновая функция мультиполей зависит от времени и начальных условий, которых больше чем начальных координат. Ранг мультиполей образует счетное множество, как и количество разных уровней собственной энергии и стационарных волновых функций электронов в атоме. При этом множество, отличное от счетного количества условий образования мультиполей, образует континуум. В зависимости от начальных условий, волновая функция мультиполей, превращается в стационарную волновую функцию дискретных уровней энергии излучения.

Таким образом с помощью изменения начальных условий происходит перестройка волновой функции с энергией мультиполя и в конечный момент времени волновая функция, зависящая от времени, оказывается равной стационарной волновой функции определенного состояния электрона. Этот момент времени определяется из равенства, где величина  $\text{Im } E_n(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  определяется комплексной малой массой частиц вакуума, но группировка частиц вакуума ранга  $n$  образуют энергию электрона с главным квантовым числом  $n$ . Свойства частиц вакуума см. [1]

$$|\psi| = \exp\left\{\int_0^t \frac{\text{Im} E_n(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\hbar} \sin\left[\frac{\text{Im} E_n(x_1^0, x_2^0, x_3^0)t}{\hbar} + \text{Im} \varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\right] dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{\cos\left[\frac{\text{Im} E_n(x_1^0, x_2^0, x_3^0)t}{\hbar} + \text{Im} \varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\right] - \cos[\text{Im} \varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)]\right\} = R_{nl}[r(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]$$

Для более сложных атомов волновая функция комплексная см. [23], где вычислена энергия атома гелия с комплексной волновой функцией. Откуда определится время излучения и значение начальных условий. Время излучения возможно окажется комплексным, где мнимая часть определяет дисперсию времени.

Мнимое время и комплексная траектория используется в квантовой механике. Так в задаче №3 к §77 см. [21] определено мнимое время

$$\Omega \tau_0 = i \text{Arsh} \gamma, \gamma = \frac{\Omega}{2F} = \frac{\sqrt{2m|E|}}{|e|E_0} \omega, \text{ где } |E| - \text{ энергия связи электрона в яме, } E_0$$

амплитуда переменного электрического поля,  $\omega$  частота этого переменного поля. «Мнимость момента времени  $\tau_0$  выражает собой классическую неосуществимость процесса». Где плотность вероятности считается по формуле

$$w \sim \exp\left[-2 \text{Im}\left(\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{4F^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega \tau' d\tau' + \tau_0\right)\right].$$

Наличие в плотности вероятности мнимого значения  $\tau_0$  говорит о зависимости дисперсии времени с амплитудой  $\text{Im} \tau_0$ , т.е. о колебании времени в зависимости от метрического интервала с амплитудой, зависящей от величины  $\text{Im} \tau_0$ .

Метод комплексной траектории используется как математический прием для определения коэффициента отражения от барьера §52 см. [21]. Также используется комплексное время при описании перехода под влиянием адиабатических возмущений см. [21] §53. В этих двух случаях дисперсия координаты и времени определяется плотностью вероятности, и соответствует мнимым координатам и времени. Дисперсия определяет колебание координат и времени с амплитудой, зависящей от мнимой компоненты координаты и времени.

Я же, используя опыт работы с комплексным, турбулентным режимом, описанным в [4], [11] предлагаю несколько другую интерпретацию мнимых, турбулентных величин как колебание с амплитудой, равной мнимой части с частотой, определяемой безразмерной мнимой частью.

## **6. Использование полиномов Лежандра нецелого порядка для описания детерминированного спина частицы**

Для стационарной волновой функции, зависящей от радиуса построена волновая функция, зависящая от времени и начальных условий. Стационарная волновая функция, имеет постоянную энергию. В зависимости от начальных данных зависящая от времени волновая функция становится равной стационарной волновой функции и происходит излучение энергии в детерминированный момент времени. Случайность в этом процессе определяется точностью задания начальной скорости и начальных координат, все остальное реализуется детерминированным образом. Составим уравнение Навье – Стокса для детерминированного определения проекции спина и ее квантового числа, описывающего модуль момента инерции частицы.

Для описания целого спина используют полиномы Лежандра с целыми индексами. Я предлагаю для описания полуцелого спина использовать телесные углы с периодом  $4\pi$  см. [26]. В случае произвольного спина надо использовать сочетание двух периодов по предлагаемым формулам см. [24]. В двух предельных случаях равенства нулю целого или отсутствия полуцелого спина формулы справедливы, в промежуточном случае происходит интерполяция. Для частиц вакуума с произвольным спином можно было воспользоваться одной угловой частью волновой функцией см. [24]. Для этого надо ввести углы

$$\cos\Theta_\alpha = [j(j+1)\cos\theta + s(s+1)\cos(\Theta/2)] / L(L+1); L(L+1) = j(j+1) + s(s+1)$$



$$\exp(iS \cdot \Omega_\alpha) = \exp[i(m\varphi + s_z \Omega)]; S = m + s_z, s_z = (2k + 1)/2$$

и определять сферические функции с действительными квантовыми числами  $S, L$  в итоге получим волновую функцию  $Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha) = P_L^S(\cos \Theta_\alpha / 2) \exp(iS \Omega_\alpha)$  см. [7].

Получим уравнение Навье-Стокса, описывающее спин частицы, для чего запишем уравнение, определяющее произвольную частоту колебаний

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha)}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin^2 \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2} \left( \frac{\partial Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha)}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta_\alpha / 2} \frac{\partial^2 Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha)}{\partial (\Omega_\alpha)^2} + \\ + L(L+1) Y_L^S(\Theta_\alpha, \Omega_\alpha) = 0 \\ \frac{\partial P_L^S(\Theta_\alpha)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 P_L^S(\Theta_\alpha)}{\partial (\cos \Theta_\alpha / 2)^2} + [S^2 + L(L+1) \sin^2 \Theta_\alpha / 2] P_L^S(\Theta_\alpha) = 0; \tau = t \frac{\hbar}{mr^2} \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством  $\frac{\partial^2 P_L^S}{\partial (\cos \Theta_\alpha / 2)^2} = P_L^S \left[ \frac{\partial^2 \ln P_L^S}{\partial (\cos \Theta_\alpha / 2)^2} + \left( \frac{\partial \ln P_L^S}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2} \right)^2 \right]$ .

Уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \ln P_L^S}{\partial (\cos \Theta_\alpha / 2)^2} + \left( \frac{\partial \ln P_L^S}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2} \right)^2 + S^2 + L(L+1) \sin^2 \Theta_\alpha / 2 = 0$$

Введем функцию  $\omega_L = i \frac{\hbar}{ma_0^2} \frac{\partial \ln P_L^S}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2}$  и продифференцируем уравнение по косинусу половины углу, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_L}{\partial t} + i \frac{\hbar}{2ma_0^2} \frac{\partial^2 \omega_L}{\partial (\cos \Theta_\alpha / 2)^2} + \omega_L \frac{\partial \omega_L}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2} + \frac{\hbar^2}{2m^2 a_0^4} L(L+1) \sin \Theta_\alpha = 0 \\ \frac{\partial \Omega_L}{\partial \tau} + i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega_L}{\partial (\cos \Theta_\alpha / 2)^2} + \Omega_L \frac{\partial \Omega_L}{\partial \cos \Theta_\alpha / 2} + \frac{1}{2} L(L+1) \sin \Theta_\alpha = 0 \\ \omega_L = \Omega_L \frac{\hbar}{ma_0^2}; t = \tau \frac{ma_0^2}{\hbar} \end{aligned}$$

Решая это уравнение Навье-Стокса относительно частоты в комплексной плоскости, получим

$$\omega_L = (R_{cr} - i \sqrt{T/\alpha - R_{cr}^2 \beta}) \omega_L(t, \cos \Theta_\alpha / 2) = R_{cr} (1 - i) \omega_L(t, \cos \Theta_\alpha / 2).$$

Значение внешнего давления, равного  $T/\alpha = R_{cr}^2$  определяет начало комплексного турбулентного режима, которое происходит при значении коэффициента, равному критическому числу Рейнольдса.

Тогда значение угла определится из уравнения

$$\sin \Theta_\alpha \frac{d\Theta_\alpha}{d\tau} = -\frac{d \cos \Theta_\alpha}{d\tau} = \operatorname{Re} \Omega_L(\cos \Theta_\alpha) + i\sqrt{2} \operatorname{Im} \Omega_L(\cos \Theta_\alpha) \sin[\operatorname{Im} \Omega_L(\cos \Theta_\alpha)\tau]; \quad (6.1)$$

$$\cos \Theta_\alpha = \cos \Theta_\alpha(t, \Theta_\alpha^0)$$

Используется комплексная частота. Тогда модуль волновой функции, зависящий только от времени равен

$$\begin{aligned} |P_L^S(\cos \Theta_\alpha)| &= \left| \exp\left[-i \int_0^{\Theta_\alpha} \Omega_L(t, \cos \Theta_\alpha) \sin \Theta_\alpha d\Theta_\alpha\right] \right| = \\ &= \left| \exp\left[i \int_0^\tau \Omega_L^2(t, \Theta_\alpha^0) dt\right] \right| = \left| \exp\left[i \int_0^\tau \{[\operatorname{Re} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0)]^2 - 2[\operatorname{Im} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0)]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4i \operatorname{Re} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \operatorname{Im} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \sin\left[\int_0^t \operatorname{Re} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \operatorname{Im} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) dt\right]\right\} dt \right| \end{aligned}$$

Использовали свойство мнимой части определять вклад в решение см. [11]. Но данная ситуация - это особый случай умножения фазы на мнимую единицу, и мнимая часть сохраняет множитель мнимая единица. При этом квадрат модули комплексного числа совпадает со средним модулем комплексного числа, где мнимая часть умножена на синус частоты на время.

Имеем конечную часть модуля волновой функции

$$\begin{aligned} |P_L^S(\tau, \Theta_\alpha^0)| &= \exp\left\{-\int_0^\tau 4 \operatorname{Re} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \operatorname{Im} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \sin\left[\int_0^t \operatorname{Re} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \operatorname{Im} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) dt\right] dt\right\} = \\ &= |P_L^S(\tau, \cos \Theta_\alpha)| \end{aligned}$$

Эта волновая функция определяется при всех начальных значениях углов и когда совпадает с модулем стационарной волновой функцией спина, то реализуется заданное значение проекции и модуля спина.

Собственная энергия равна

$$E_L(\tau) = -4 \frac{\hbar^2}{ma_0^2} R_{cr}^2 \operatorname{Re} \Omega_L(\tau, \Theta_\alpha^0) \operatorname{Im} \Omega_L(\tau, \Theta_\alpha^0) \sin \left[ \int_0^\tau R_{cr} \operatorname{Re} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) \operatorname{Im} \Omega_L(t, \Theta_\alpha^0) dt \right] =$$

$$= \frac{\hbar^2 L(L+1)}{ma_0^2}$$

Получается непрерывное излучение и поглощение энергии.

Таким образом с помощью изменения начальных условий происходит перестройка волновой функции и в конечный момент времени волновая функция, зависящая от времени, оказывается равной стационарной волновой функции определенного состояния электрона. Этот момент времени определяется из равенства, где величина  $\operatorname{Im} E_L(\Theta_\alpha^0)$  определяется суммой комплексной малой массой частиц вакуума, образующей элементарную частицу, причем группировка частиц вакуума ранга  $L$  образуют энергию электрона со спином  $L$ . Свойства частиц вакуума см. [1]

$$|\psi| = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\operatorname{Im} E_L(\Theta_\alpha^0)}{\hbar} \sin \left[ \frac{\operatorname{Im} E_L(\Theta_\alpha^0)t}{\hbar} + \operatorname{Im} \varphi(\Theta_\alpha^0) \right] dt \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \cos \left[ \frac{\operatorname{Im} E_L(\Theta_\alpha^0)t}{\hbar} + \operatorname{Im} \varphi(\Theta_\alpha^0) \right] - \cos [\operatorname{Im} \varphi(\Theta_\alpha^0)] \right\} = P_L^S(\cos \Theta_\alpha)$$

Откуда определится время излучения и значение комплексных начальных условий. Время излучения возможно окажется комплексным, где мнимая часть определяет дисперсию времени. При этом угол, вычисленный по формуле (6.1) совпадет со стационарным действительным значением угла.

Мнимое время и комплексная траектория используется в квантовой механике см. конец раздела 5.

## Литература

1. Якубовский Е.Г. Частицы вакуума с использованием мировых констант Планка в семимерном пространстве теории струн «Энциклопедический фонд России», 2018, 25 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1557177415.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1557177415.pdf)
2. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf>
3. Якубовский Е.Г. Общее решение уравнения Навье-Стокса и уравнения Шредингера с давлением или потенциалом в виде полинома второй степени по трем переменным. 2018, 14 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1543092210.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1543092210.pdf)
4. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокса II. «Энциклопедический фонд России», 2018, 64 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1552952837.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1552952837.pdf)
5. Bredberg, Irene. 2012. The Einstein and the Navier-Stokes Equations: Connecting the Two. Doctoral dissertation, Harvard University.

6. Rodrigues F. G., Rodrigues Jr W. A., da Rocha R. The Maxwell and Navier-Stokes equations that follow from Einstein equation in a spacetime containing a Killing vector field //AIP Conference Proceedings. – AIP, 2012. – Т. 1483. – №. 1. – С. 277-295.
7. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. <https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf>
8. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. <https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf>
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля т.II, Наука, М.,1973,564с.
10. Якубовский Е.Г. По поводу комплексного решения нелинейного уравнения ОТО «Энциклопедический фонд России», 2019, 5 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1558982506.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1558982506.pdf)
11. Якубовский Е.Г. Кинематика описания турбулентного потока с помощью комплексной скорости «Энциклопедический фонд России», 2019, 6 стр. [http://www.russika.ru/userfiles/390\\_1557835519.pdf](http://www.russika.ru/userfiles/390_1557835519.pdf)
12. Якубовский Е.Г. Существование гравитации без наличия материальных тел с помощью турбулентной комплексной скорости частиц вакуума «Энциклопедический фонд России», 2019, 3 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1566050845.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1566050845.pdf)
13. Якубовский Е.Г. Общая теория гравитационного и электромагнитного поля «Энциклопедический фонд России», 2017, 17 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1463866386.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1463866386.pdf)
14. Электронный ресурс  
[http://www.physbook.ru/index.php/Kvant.\\_Ядерные\\_спектры](http://www.physbook.ru/index.php/Kvant._Ядерные_спектры)
15. Электронный ресурс <http://nuclphys.sinp.msu.ru/ndb/ndb103.htm>

16. Барсуков О. А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии М.: Физматлит, 2011, 560 стр.
17. Ишханов Б.С., Степанов М.Е., Третьякова Т.Ю. Семинары по физике частиц и атомного ядра: Учебное пособие / Б.С. Ишханов, М.Е. Степанов, Т.Ю. Третьякова – М.: «КДУ», «Университетская книга», 2016. — 292 с. — ISBN 978-5-91304-678-9. URL: <https://bookonline.ru/node/4087/>
18. Лекции профессора Б.С. Ишханова  
[http://nuclphys.sinp.msu.ru/lect/ishkhanov2018/li\\_09d.pdf](http://nuclphys.sinp.msu.ru/lect/ishkhanov2018/li_09d.pdf)
19. Якубовский Е.Г. Кинематика описания турбулентного потока с помощью комплексной скорости «Энциклопедический фонд России», 2019, 6 стр.  
[http://www.russika.ru/userfiles/390\\_1557835519.pdf](http://www.russika.ru/userfiles/390_1557835519.pdf)
20. Якубовский Е.Г. Совмещение стандартной модели и ОТО «Энциклопедический фонд России», 2018, 19 стр.  
[http://russika.ru/userfiles/390\\_1544172229.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1544172229.pdf)
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика Нерелятивистская теория т. III, Наука, М., 1969, 768с.
22. Якубовский Е.Г. Уравнение Навье – Стокса в электромагнитном поле с учетом квантовых эффектов «Энциклопедический фонд России», 2018, 6 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1482939691.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1482939691.pdf)
23. Якубовский Е.Г. Правильное количественное описание экранировки электронов в атоме «Энциклопедический фонд России», 2019, 8 стр., [http://russika.ru/userfiles/390\\_1556135011.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1556135011.pdf)
24. Якубовский Е.Г. Полиномы Лежандра не целого порядка «Энциклопедический фонд России», 2018, 11 стр.  
[http://russika.ru/userfiles/390\\_1505253784.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1505253784.pdf)
25. Якубовский Е.Г. Единые уравнения, описывающие квантовую и классическую механику «Энциклопедический фонд России», 2019, 80 стр.  
[http://russika.ru/userfiles/390\\_1567171784.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1567171784.pdf)

26. Якубовский Е.Г. Форма элементарных частиц в виде тора, причем спин описывается двумя плоскостями вращения «Энциклопедический фонд России», 2018, 10 стр. [http://russika.ru/userfiles/390\\_1504111822.pdf](http://russika.ru/userfiles/390_1504111822.pdf)