

Определение скорости движения тела и вязкой среды
при произвольном числе Рейнольдса

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Нестационарные решения уравнения Навье-Стокса возникают при переменной скорости тела. Получено решение для не стационарной задачи решения для среды по заданной скорости тела. Появляется возможность по тяге двигателя описать скорость тела и среды. Причем проявилось неожиданное свойство движения. В результате взаимодействия устанавливается ускорение Ньютона равное нулю и действующая сила пропорциональна тензору скорости. Т.е. сила тяжести и горизонтальная сила тяги могут привести к неожиданному результату горизонтальному направлению действующей скорости при определенной форме тела, в частности приводят к поступательной горизонтальной скорости самолета. Под действием тяги и минимальным изменениям формы тела может меняться скорость тела и среды.

Решение для сжимаемой жидкости

Запишем уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_k}{\partial x_l} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x_k} + \nu \Delta V_k = -c_s^2 \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial x_k} + \nu \Delta V_k + (\zeta + \nu / 2) \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_l \partial x_k}$$

$$\frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial t} + V_k \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0,$$

Уравнение Навье-Стокса для сжимаемой жидкости используется со второй вязкостью.

Решение ищем в виде

$$u_k = U_k(\omega, k_1, k_2) \exp\left[i\left(\sum_{k=1}^2 k_l x_l + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_1^2 - k_2^2} x_3\right)\right] = \quad (1)$$

$$= U_k(\omega, k_1, k_2) \exp\{ik\rho r(\theta, \varphi)[\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0]\}$$

Уравнение движения тела, под действием тяги, имеет вид на свободной поверхности жидкости для ламинарного режима течения потока

$$m \frac{du_l}{dt} = F_l + \oint [pn_l - \eta(\frac{\partial u_m}{\partial x^l} + \frac{\partial u_l}{\partial x^m})n_m] ds;$$

Проинтегрируем уравнение (1) по времени и частоте и подставим в уравнение движения. Тогда первая производная по времени равна нулю, так как пропорциональна $\delta(\omega - \omega_{cr})(\omega - \omega_{cr}) = 0$ и уравнение движения сводится к равенству

$$F_l = \oint [-pn_l + \eta(\frac{\partial u_m}{\partial x^l} + \frac{\partial u_l}{\partial x^m})n_m] ds$$

Критическая частота ω_{cr} определится из метода стационарной фазы уравнения (3) или (8) в случае переменной скорости тела. В случае уравнений Навье-Стокса получим

$$\begin{aligned} & A(\omega, k_1, k_2)U_p(\omega, k_1, k_2)vk_l^2 + (\zeta + \nu/2)k_l k_p A(\omega, k_1, k_2)U_l(\omega, k_1, k_2) + \\ & + iA(2\omega, 2k_1, 2k_2)U_l(\omega, k_1, k_2)U_p(\omega, k_1, k_2)k_l = D_p(\omega, k_1, k_2), p = 1, \dots, 3. \\ & \delta(\omega - \omega_{cr})(\omega - \omega_{cr}) = 0 \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (2), вычислим конечный спектр для внешней задачи

$$\begin{aligned} A(\omega, k_1, k_2) &= \int \exp\{i[\sum_{k=1}^2 k_l x_l + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_1^2 - k_2^2} x_3]\} d^3 x = \\ &= \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp\{i\rho r(\theta, \varphi)[k_1 \sin \theta \cos \varphi + k_2 \sin \theta \cos \varphi + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_1^2 - k_2^2} \cos \theta]\} \times \\ &\times \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} d\rho d\theta d\varphi = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp\{-i\rho r(\theta, \varphi) \frac{\omega}{c_s} [\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0] - \\ &\quad - \alpha \rho^2 + i(\omega - \omega_{cr})t\} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} d\rho d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Где имеем $0 < \alpha \ll 1$. Получаем конечный спектр этой задачи в параметрической форме для тела больших размеров

$$\begin{aligned}
A(\omega, k_1, k_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\exp\{ir(\theta, \varphi) \frac{\omega}{c_s} [\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0]\}}{ir(\theta, \varphi) \frac{\omega}{c_s} [\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0]} \right] \times \\
&\quad \times \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\exp[ir(\theta_0, \varphi_0) \frac{\omega}{c_s} + \frac{i\pi}{2}]}{ir(\theta_0, \varphi_0) \frac{\omega}{c_s} k_l(\theta_0, \varphi_0) r(\theta_0, \varphi_0)} = \\
&\quad = \frac{\exp[ir(\theta_0, \varphi_0) \frac{\omega}{c_s}]}{H(\theta_0, \varphi_0) k_s^3}; \\
\Phi &= -k_s(\theta_0, \varphi_0) r(\theta_0, \varphi_0) [\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta] = \\
&= -k_s(\theta_0, \varphi_0) r(\theta_0, \varphi_0) [-(\varphi - \varphi_0)^2 \sin \theta \sin \theta_0 / 2 - (\theta - \theta_0)^2 / 2 + 1] \\
k_1 &= \frac{\omega}{c_s} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k_2 = \frac{\omega}{c_s} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k_3 = \frac{\omega}{c_s} \cos \theta_0
\end{aligned}$$

Получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&A(\omega, k_1, k_2) U_p(\omega, k_1, k_2) \nu k_s^2 + iA(2\omega, 2k_1, 2k_2) U_l(\omega, k_1, k_2) U_p(\omega, k_1, k_2) k_l = \\
&= D_p(\omega, k_1, k_2) = ic_s^2 k_p X(\omega, k_1, k_2) A(\omega, k_1, k_2) - (\zeta + \nu / 2) k_l k_p A(\omega, k_1, k_2) U_l(\omega, k_1, k_2), \\
k = 1, \dots, 3; k_s^2 &= \frac{\omega^2}{c_s^2}; iA(2\omega, 2k_1, 2k_2) k_l U_l(\omega, k_1, k_2) X(\omega, k_1, k_2) + iA(\omega, k_1, k_2) k_l U_l(\omega, k_1, k_2) = 0; \\
\ln \rho / \rho_0 &= \exp(ik_l x^l) X(\omega, k_1, k_2) = \\
&= -\exp(ik_l x^l) \frac{A(\omega, k_1, k_2)}{A(2\omega, 2k_1, 2k_2)}
\end{aligned}$$

В жидкости и газе перпендикулярные компоненты скорости равны

$\sum_{l=1}^3 1/c_l^2 = 1/c_s^2$, где c_s это скорость звука в изотропной среде. При этом спектр

скорости определяется из уравнения для нестационарной задачи

$$\begin{aligned}
&A(\omega, k_1, k_2) U_p(\omega, k_1, k_2) \nu k_s^2 + (\zeta + \nu / 2) k_l k_p A(\omega, k_1, k_2) U_l(\omega, k_1, k_2) \\
&+ iA(2\omega, 2k_1, 2k_2) U_l(\omega, k_1, k_2) U_p(\omega, k_1, k_2) k_l = -ic_s^2 k_p A(\omega, k_1, k_2) X(\omega, k_1, k_2) = \\
&= ic_s^2 k_p \frac{A^2(\omega, k_1, k_2)}{A(2\omega, 2k_1, 2k_2)} = \frac{ic_s^2 k_p}{H(\theta_0, \varphi_0) k_s^3}, p = 1, \dots, 3; \\
X(\omega, k_1, k_2) &= -\frac{A(\omega, k_1, k_2)}{A(2\omega, 2k_1, 2k_2)}; \\
D_p(\omega, k_1, k_2) &= ic_s^2 k_p \frac{A^2(\omega, k_1, k_2)}{A(2\omega, 2k_1, 2k_2)} \\
DD_p(\omega, k_1, k_2) &= ic_s^2 k_p \frac{A(\omega, k_1, k_2)}{A(2\omega, 2k_1, 2k_2)}
\end{aligned}$$

Причем для внешней задачи имеем значение коэффициента

$$D_p(\omega, k_1, k_2) = -\frac{ic_s^2 k_p}{H(\theta_0, \varphi_0) k_s^3}. \text{ Умножаем каждое уравнение на значение волнового}$$

числа и складываем, получим уравнение

$$\begin{aligned} iA(2\omega, 2k_1, 2k_2)x^2 + A(\omega, k_1, k_2)x(3\nu/2 + \zeta)k_s^2 - D_p(\omega, k_1, k_2)k_p &= 0 \\ x = U_l(\omega, k_1, k_2)k_l; \\ x &= \frac{-A(\omega, k_1, k_2)(3\nu/2 + \zeta)k_s^2}{2iA(2\omega, 2k_1, 2k_2)} + \\ &+ \frac{\sqrt{[A(\omega, k_1, k_2)[(3\nu/2 + \zeta)k_s^2]^2 + 4iD_p(\omega, k_1, k_2)k_p A(2\omega, 2k_1, 2k_2)}}{2iA(2\omega, 2k_1, 2k_2)} \\ x &= \frac{-A(\omega, k_1, k_2)\{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2 - \sqrt{(3\nu/2 + \zeta)^2 k_s^4 - 4c_s^2 k_s^2}\}}{2iA(2\omega, 2k_1, 2k_2)} \sim \\ &\sim \frac{D_p(\omega, k_1, k_2)k_p}{A(\omega, k_1, k_2)(3\nu/2 + \zeta)k_s^2}; x = U_l(\omega, k_1, k_2)k_l \\ U_p(\omega, k_1, k_2) &= \frac{2D_p(\omega, k_1, k_2) - 2(\zeta + \nu/2)k_p A(\omega, k_1, k_2)x}{A(\omega, k_1, k_2)\{(\nu/2 - \zeta)k_s^2 + 2\sqrt{(3\nu/2 + \zeta)^2 k_s^4 - 4c_s^2 k_s^2}\}} \end{aligned}$$

Из этого нелинейного уравнения определяется величина $U_p(\omega, k_1, k_2)$ при не нулевой частоте. Скорость определяется по формуле

$$\begin{aligned} u_l(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U_l(\omega, k_1, k_2) \exp\{i(\omega - \omega_{cr})t - i[\sum_{k=1}^2 k_l(\theta_0, \varphi_0)x_l + \\ &+ \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_1^2(\theta_0, \varphi_0) - k_2^2(\theta_0, \varphi_0)x_3}]\} \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 dt d\omega; \end{aligned} \quad (2)$$

Не стационарная задача возникает при переменной скорости тела. При этом переменная скорость тела может стать комплексной. Но мнимая часть скорости тела мала, поэтому амплитуды колебания не значительные. Они пропорциональны ротору скорости тела, деленному на мнимую

гидродинамическую комптоновскую частоту $\omega_c = \frac{ic_s^2}{3\nu + 2\zeta} \rightarrow \frac{mc^2}{\hbar}; 3\nu/2 + \zeta = \frac{i\hbar}{2m}$. К

числу Рейнольдса тела добавляется

$$\Delta \mathbf{R} = \text{rot} \mathbf{V} / 2\omega_c = -i(3\nu/2 + \zeta) \text{rot} \mathbf{V} / c_s^2, R_p^0 = \frac{4V_p^0 a}{3\nu + 2\zeta}.$$

В случае изменения скорости частота равна константе и каждая гармоника определяет свою частоту. В случае спектра скорости частицы дельта функция имеет постоянную частоту колебаний тела, плюс постоянная скорость тела.

$$\operatorname{Im} \frac{d \ln \sqrt{\sum_{p=1}^3 u_p^2(\omega) \exp(i\omega t)}}{2dt} - \omega_{cr} = \begin{cases} \omega - \omega_{cr}, \operatorname{Im} R_p \neq 0, p = 1, \dots, 3 \\ 0 = \omega_0 - \omega_{cr}, \sqrt{\sum_{p=1}^3 u_p^2(\omega)} = \delta(\omega - \omega_0), \operatorname{Im} R_p = 0, p = 1, \dots, 3 \end{cases}$$

$$\omega_{cr} = k(\theta_0, \varphi_0) c_s$$

Данная формула следует из уравнения (2). Критическая частота определяется из уравнения стационарной фазы уравнения (3) и (8).

В случае переменной скорости тела определяется множество частот. При интегрировании по времени образуется дельта функция от частоты $\delta(\omega - \omega_{cr})$. При интегрировании дельта функции по частоте произвольной частоте присваивается значение критической, и фаза интеграла скорости явно не зависит от времени.

В случае постоянной скорости фаза решения уравнения Навье-Стокса не зависит от времени. Единственный способ объединения два движения поступательное и спектр колебаний тела дельта функция - это равенство частоте критической.

Получается, что в обоих случаях произвольного спектра и поступательного движения с выделенной частотой устанавливается критическая частота колебания. Только в случае постоянной скорости критическая частота является константой.

Учитывается переменная скорость на поверхности тела, где на поверхности тела $x_3 = g(x_1, x_2)$ наложим общее условия $k_s = k_s[\theta_0(t), \varphi_0(t)]$ на модуль действительной скорости. Внешняя задача приведена к внутренней, поэтому радиус изменяется от нуля, до размера тела. Но получить приближенную информацию о зависимости частоты от волновых чисел можно с помощью метода стационарной фазы на поверхности тела. Но полученная информация

о зависимости частоты от волновых чисел нуждается в уточнении
Принтегрировав скорость по частоте и времени получим

$$\begin{aligned}
u_p(t, x_1, x_2, x_3) &= \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[2DD_p(\omega_{cr}, k_1, k_2) - 2(\zeta + \nu/2)k_p x] \exp[ir(\theta_0, \varphi_0) \frac{\omega}{c_s}]}{(v/2 - \zeta)k_s^2 + 2\sqrt{(3\nu/2 + \zeta)^2 k_s^4 - 4c_s^2 k_s^2}} \times \\
&\times \exp\{-ik_s r[\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta]\} \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 = \\
&= \frac{2DD_p(\omega_{cr}, k_1, k_2) - 2(\zeta + \nu/2)k_p x}{(v/2 - \zeta)k_s^2 + 2\sqrt{(3\nu/2 + \zeta)^2 k_s^4 - 4c_s^2 k_s^2}} / k_s(\theta_r, \varphi_r)r(\theta_r, \varphi_r) \quad (3) \\
\Phi &= -k_s(\theta_r, \varphi_r)r(\theta_r, \varphi_r)[\sin \theta_r \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_r) + \cos \theta_r \cos \theta - 1] = \\
&= k_s(\theta_r, \varphi_r)r(\theta_r, \varphi_r)[(\varphi - \varphi_r)^2 \sin \theta \sin \theta_r + (\theta - \theta_r)^2] / 2; \\
\frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_3, \theta_r, \varphi_r)}{\partial \theta_0} &= 0; \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_3, \theta_r, \varphi_r)}{\partial \varphi_0} = 0; \theta_r = \theta_r(x_1, x_2, x_3); \varphi_r = \varphi_r(x_1, x_2, x_3) \\
k_s &= k_s(\theta_r, \varphi_r); x_1 = r(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \cos \varphi_r; x_2 = r(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \sin \varphi_r; x_3 = g(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Но проблема состоит в том, что зависимость частоты от волновых чисел или параметров θ_0, φ_0 не известная. Точка стационарной фазы соответствует равенству $\theta_r(t) = \theta_0(t) = \theta, \varphi_r(t) = \varphi_0(t) = \varphi$, когда производная по радиусу и частоте не дают вклада в значение производной от фазы в точке стационарной фазы. Зависимость координат от угла на поверхности движущегося с переменной скоростью тела определится из формул

$$\begin{aligned}
x_1 &= r(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \cos \varphi_r; x_2 = r(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \sin \varphi_r; x_3 = g(x_1, x_2); \\
k_1 &= k_s(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \cos \varphi_r; k_2 = k_s(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \sin \varphi_r \quad (4)
\end{aligned}$$

Уравнение движения тела в вязкой среде определяется формулой, где нормаль направлена внутрь тела

$$\begin{aligned}
F_l &= \oint \{-pn_l + \eta(\frac{\partial u_m}{\partial x^l} + \frac{\partial u_l}{\partial x^m})n_m\} ds = f_l + \sigma_{lm} U_m; \\
|\sum_{l=1}^3 F_l^2(t)| &= \oint [-pn_l + \eta(\frac{\partial u_m}{\partial x^l} + \frac{\partial u_l}{\partial x^m})n_m] ds|^2 = f^2 \{ \text{Im} \frac{d \ln \sum_{p=1}^3 u_p^2(t)}{2dt}, r[\theta_r(t), \varphi_r(t)], \theta_r(t), \varphi_r(t) \} \\
\ln \rho / \rho_0 &= \frac{c_V}{c_p} \ln p / p_0 = \exp(ik_l x^l) X(\omega, k_1, k_2) = -\exp(ik_l x^l) \frac{A(\omega, k_1, k_2)x}{A(\omega, k_1, k_2)\gamma + A(2\omega, 2k_1, 2k_2)x} \\
u_l &= \frac{2DD_l(\omega_{cr}, k_1, k_2) - 2(\zeta + \nu/2)k_l x}{(v/2 - \zeta)k_s^2 + 2\sqrt{(3\nu/2 + \zeta)^2 k_s^4 - 4c_s^2 k_s^2}} / k_s(\theta_r, \varphi_r)r(\theta_r, \varphi_r)
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-A(\omega, k_1, k_2)[(3\nu/2 + \zeta)k_s^2 - \sqrt{(3\nu/2 + \zeta)^2 k_s^4 - 4c_s^2 k_s^2}]}{2iA(2\omega, 2k_1, 2k_2)}$$

При этом имеем уравнение (4), определяющее волновые числа и связь координат с углами. Можно вычислить частоту по формуле

$$\omega_{cr}[\theta_r(t), \varphi_r(t)] = k_s[\theta_r(t), \varphi_r(t)]c_s = \text{Im} \frac{d \ln \sum_{p=1}^3 u_p^2(t)}{2dt}. \text{ Зависимость углов от времени}$$

можно получить по действующей тяге. В самом деле углы определяются модуля действующей тяги, приравненной формуле из действующей силы из двух уравнений по значению радиуса.

В случае постоянной скорости критическая частота является задаваемой константой, и из уравнения $\left| \sqrt{\sum_{p=1}^3 F_p^2} \right| = f\{\omega_0 c_s, r[\theta_r(t), \varphi_r(t)], \theta_r(t), \varphi_r(t)\} = \text{const}$

можно аналогичным способом получить значение углов.

Отмечу неожиданный результат вычисления. Ускорение Ньютона для вязкой среды равно нулю и действующая сила пропорциональна тензору скорости. Это приводит к несовпадению направления действующей силы и результирующей скорости тела. Справедлива формула для скорости тела $U_m = \sigma_{ml}^{-1}(F_l - f_l)$, где матрица зависит от формы тела. Тело имеет асимметрию относительно горизонтальной плоскости и в плоскости, перпендикулярной продольному направлению, а в остальном тело симметричное

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \cos \theta \cos \varphi \\ F_1 \cos \theta \sin \varphi \\ -mg + F_1 \sin \theta \end{pmatrix}; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Уравнение, описывающее подъем, спуск и горизонтальный полет следующее, причем сила тяги направлена под углом к горизонту, и происходит управление угла атаки самолета, без существенного изменения его формы, с помощью горизонтальных рулей.

$$\begin{aligned}
& (1 + \alpha\theta)\sqrt{(a_{31})^2(1 + \beta\varphi)^2 + (a_{32})^2(1 - \beta\varphi)^2} F_1 \cos\theta \cos\left[\varphi\left(1 + \frac{2a_{31}a_{32}}{a_{31}^2 + a_{32}^2}\beta\right) - \arctan\frac{a_{32}}{a_{31}}\right] + \\
& \quad + a_{33}(1 - \alpha\theta)(-mg + F_1 \sin\theta) = U_z \\
& \sqrt{(a_0)^2(1 + \alpha^2\theta^2) + (b_0)^2(1 + \alpha^2\theta^2) + [(a_0)^2 - (b_0)^2]\alpha\theta} F_1 \sin\left[\theta\left(1 + \frac{2a_0b_0}{a_0^2 + b_0^2}\alpha\right) + \arctan\frac{a_0}{b_0}\right] = \\
& \quad = b_0 mg(1 - \alpha\theta) + U_z; \\
& b_0 = a_{33}, a_0 = \sqrt{(a_{31})^2(1 + \beta\varphi)^2 + (a_{32})^2(1 - \beta\varphi)^2} \cos\left[\varphi\left(1 + \frac{2a_{31}a_{32}}{a_{31}^2 + a_{32}^2}\beta\right) - \arctan\frac{a_{32}}{a_{31}}\right] \\
& U_x = F_1 \cos\theta(a_{11} \cos\varphi + a_{12} \sin\varphi)(1 + \beta\varphi); U_y = a_{22} F_1 \sin\theta \sin\varphi
\end{aligned}$$

При полете с горизонтальной скоростью для нулевой вертикальной и поперечной скорости имеем угол $\theta = 0, \varphi = 0$ и угол атаки и рыскания равны нулю, а создается подъемная сила, которая уравновешивает силу тяжести и направление для тяги двигателя горизонтальное $F_1 = \frac{b_0 mg}{a_0} = \frac{a_{33} mg}{a_{31}}$.

Стационарная скорость самолета определяется величиной

$$U_x = \frac{a_{11} b_0 mg}{a_0} = \frac{a_{11} a_{33} mg}{a_{31}}, a_{11} \gg 1.$$

Для отрицательной вертикальной скорости нужно уменьшать тягу самолета относительно горизонтального полета и уменьшать угол атаки самолета θ . Для взлета надо либо увеличивать тягу самолета, либо увеличивать угол атаки, делая угол θ положительным. Если увеличить тягу самолета в горизонтальном полете, то нужно уменьшать угол атаки. Уменьшать угол атаки и рыскания можно в пределах

$$\theta > -\arctan \frac{a_0(1+\alpha\theta)}{b_0(1-\alpha\theta)} \cong -\arctan \frac{a_0}{b_0} - \frac{2a_0b_0}{a_0^2+b_0^2}\alpha\theta; \theta > -\frac{\arctan \frac{a_0}{b_0}}{1+\frac{2a_0b_0}{a_0^2+b_0^2}\alpha} =$$

$$= -\frac{\arctan \frac{a_{31}^2(1+2\beta\varphi)}{a_{33}(1-\beta\varphi)}}{1+\frac{2a_{31}^2(1+\beta\varphi)a_{33}}{a_{31}^4(1+4\beta\varphi)+a_{33}^2(1+2\beta\varphi)}\alpha} = -\frac{1+3\beta\varphi+\frac{a_{31}^2}{a_{33}}3\beta\varphi}{2\alpha};$$

$$\theta + \varphi \frac{3\beta(1+\frac{a_{31}^2}{a_{33}})}{2\alpha} > -\frac{1}{2\alpha}; \frac{2\theta}{3\beta(1+\frac{a_{31}^2}{a_{33}})} + \varphi > -\frac{1}{3\beta(1+\frac{a_{31}^2}{a_{33}})} a_{31}^2 \ll a_{33}; \alpha \sim 18 \gg 1; \beta \sim 12 \gg 1$$

$$b_0 = a_{33}, a_0 = \sqrt{(a_{31})^2 + (a_{32})^2} \cos(\arctan \frac{a_{32}}{a_{31}}) = a_{31}^2$$

иначе увеличение тяги приведет к более ускоренному падению. Причем наряду с влиянием угла атаки, произойдет влияние угла рыскания φ , и самолет сваливается на бок при условии $3\beta/2\alpha \gg 1$. Наоборот если уменьшить тягу самолета, то нужно увеличивать угол атаки. Увеличение угла атаки

ограничено значением $\theta + \varphi \frac{3\beta(1+\frac{a_{31}^2}{a_{33}})}{2\alpha} < \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a_{31}^2}{a_{33}}}{1+\frac{2a_{31}^2 a_{33}}{a_{31}^4+a_{33}^2}\alpha}$ и дальнейшее уменьшение

тяги приведет к созданию отрицательной скорости, т.е. к падению. Но все эти соотношения справедливы, если параметры a, b изменяются линейно с поворотом рулей. Параметр α нужно делать как можно меньше, для увеличения диапазона изменения тяги.

Решение нелинейного уравнения Навье-Стокса получилось комплексное. Переход к турбулентному решению реализуется при кратном корне. Кратный корень получается при равенстве нулю квадратного корня, откуда найдем критическое число Рейнольдса. Условие равенства нулю квадратного корня приводит к вычислению комплексного переменного критического числа

Рейнольдса, которое определяется из линейного уравнения $(3\nu/2 + \zeta)k_s^2 - 2c_s k_s = 0$.

Критическое переменное число Рейнольдса определяется из уравнения

$$R_{cr} = k_s (\theta_r, \varphi_r) a_0 = \frac{4c_s a_0}{3\nu + 2\zeta};$$

$$R_p = R_p^0 - i \text{rot} \mathbf{V} \frac{3\nu/2 + \zeta}{c_s^2} = R_p^0 - a_0 i \frac{\text{rot} \mathbf{V}}{c_s} \frac{2}{R_{cr}}; R_p^0 = \frac{4V_p^0 a_0}{3\nu + 2\zeta};$$

$$R_{cr} = \frac{4c_s a_0}{3\nu + 2\zeta} = \text{const} \rightarrow 4k_c a_0 = 4 \frac{m c a_0}{\hbar};$$

Для достижения турбулентного режима должно выполняться $\sqrt{\sum_{p=1}^3 |R_p^0|^2} \geq R_{cr}; \sqrt{\sum_{p=1}^3 |V_p^0|^2} \geq c_s \frac{a}{a_0}$, где критическое число Рейнольдса соответствует равенству нулю квадратного корня. Причем в условии с поступательной скоростью кинематическая вязкость сокращается, остается условие на скорость и размер. Характерный размер a_0 соответствует толщине слоя ударной волны, и определяется по критическому числу Рейнольдса, скоростью звука и двум кинематическим вязкостям. Характерный размер a определяет свойства тела.

Неравенство следует из того, что почти поступательная скорость может быть, как ламинарной, так и турбулентной в зависимости от числа Рейнольдса поступательного движения тела, а ротор скорости тела способствует переходу в турбулентный режим. Турбулентный режим соответствует большему значению модуля числа Рейнольдса, чем критическое, либо наличию ротора скорости у тела.

Для нахождения действительного решения по комплексному надо вычислить комплексные линии тока

$$\frac{dx_k}{dt} = \text{Re} V_k(x_1, x_2, x_3) + i \text{Im} V_k(x_1, x_2, x_3), x_k = x_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0). \quad (5)$$

Причем при одном фиксированном начальном условии, линии тока определяются по всей доступной области. Можно производить усреднение по

этой произвольной константе. По гладким комплексным линиям тока определяем колеблющиеся действительные линии тока

$$y_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \sqrt{[\operatorname{Re} x_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]^2 + a \operatorname{Im} x_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)} + \sqrt{2 \operatorname{Im} x_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \sin \int_{t_0}^t \operatorname{Im} x_k(u, x_1^0, x_2^0, x_3^0) du \frac{c_s^2}{av} \cdot \quad (6)$$

При малой кинематической вязкости имеется бесконечная частота колебаний и мнимый член стремится к нулю. При этом скорость тела выбрана положительной и среднее действительное смещение положительное, но имеются случайные колебания в разные стороны на величину $\sqrt{a \operatorname{Im} x_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)}$ в положительную и отрицательную сторону. При размере тела, равном нулю случайное безразмерное смещение равно нулю, а безразмерное смещение конечно. Безразмерные параметры имеют конечное значение, а размерные нулевые. Синусоидальные колебания детерминированы.

Так как дифференциальное уравнение (5) инвариантно относительно интегрирования вперед и назад, значит и уравнение (6) должно быть инвариантно относительно этого преобразования. Но при изменении пределов интегрирования в фазе синуса в формуле (6) знак мнимой добавки изменится, следовательно, синус в точках определения решения должен равняться нулю и справедливо уравнение (7) для комплексного решения. Остальные при интегрировании вперед и назад одинаковые. Сохранится колебательный характер решения с дискретной частотой, на каждом интервале со своей частотой.

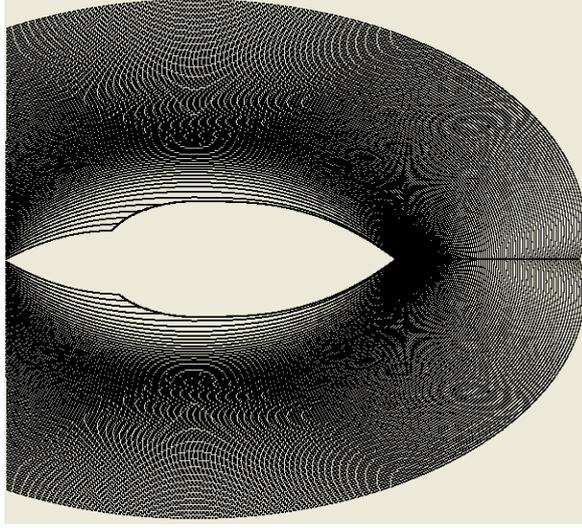
$$y_k(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \sqrt{[\operatorname{Re} x_k(t - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]^2 + a |\operatorname{Im} x_k(t - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)|} + \sqrt{2a |\operatorname{Im} x_k(t - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)|} \sin[\operatorname{Im} x_k(t - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)(t - t_0) \frac{c_s^2}{av}]$$

$$\operatorname{Im} x_k(t_{pk} - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)(t_{pk} - t_0) \frac{c_s^2}{av} = \pi p, t_{pk} - t_0 = \frac{\pi p a v}{\operatorname{Im} x_k(t_{pk} - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0) c_s^2} \cdot \quad (7)$$

$$y_k(t - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \sqrt{[\operatorname{Re} x_k(t_{pk} - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]^2 + a |\operatorname{Im} x_k(t_{pk} - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)|} + \sqrt{2a |\operatorname{Im} x_k(t_{pk} - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)|} \sin[\operatorname{Im} x_k(t_{pk} - t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)(t - t_0) \frac{c_s^2}{av}]$$

Так устроена природа, что наряду с ламинарным решением дифференциальные уравнения в частных производных, имеется турбулентное комплексное решение с средней поступательной скоростью в фазовом пространстве, равной действительной части параметра, и хаотическими колебаниями, определяемые мнимой частью тоже в фазовом пространстве. При этом скорость имеет дискретный характер. Но в случае уравнения Навье-Стокса, это фазовое пространство переходит в реальность.

Линии тока огибают тело, причем образуются недоступные зоны, как спереди тела, так и сзади тела. Спереди они образуются из-за невозможности войти внутрь тела. И хотя скорость определяется для произвольной точки области, имеется спереди недоступная для линий тока область – это пограничный слой. Также и сзади имеется область для скорости, которая выходит из тела. В этих точках линий тока нет, и образуется особая область – след, который может продолжаться до бесконечности радиуса. Это геометрия линий тока для сферы. В случае самолета, также образуется недоступная область спереди и сзади, но она имеет более сложную форму. Эти области, с резкими границами недоступной области, образуются в ламинарном режиме. Условием их существования равенство нулю скорости, нормальной к линии тока. В турбулентном режиме они размазаны по пространству в зависимости от величины мнимой части, но средние контуры этой области сохраняются. Приведу области, огибающие сферу в ламинарном режиме. В недоступных областях надо строить особое решение, отличающееся от решения уравнения Навье-Стокса (алгоритм решения см. [1], [2]). Там же имеется решение для недоступной области. Приведем линии тока для сферы, причем видна не сферическая область тела



Проинтегрированное по частоте и времени ламинарное решение определится из уравнения

$$\begin{aligned}
 u_p(x_1, x_2, x_3) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{DD_p(\omega_{cr}, k_1, k_2) - \frac{2(\zeta + \nu/2)k_p}{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2} \sum_{q=1}^3 DD_q(\omega, k_1, k_2)k_q}{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2} \times \\
 &\times \exp\left\{-i\left[\sum_{k=1}^2 k_l(\theta_0, \varphi_0)x_l + \sqrt{\frac{\omega^2(\theta_0, \varphi_0)}{c_s^2} - k_1^2(\theta_0, \varphi_0) - k_2^2(\theta_0, \varphi_0)x_3}\right]\right\} \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\left[S_p - \frac{2(\zeta + \nu/2)k_p}{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2} \sum_{q=1}^3 S_q(\omega, k_1, k_2)k_q\right] \exp[ir(\theta_0, \varphi_0)k_s(\theta_0, \varphi_0)]}{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2} \times \\
 &\times \exp\{-ik_s(\theta_0, \varphi_0)r[\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta]\} \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 = \\
 &= \frac{(-i)\left[S_p - \frac{2(\zeta + \nu/2)k_p}{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2} \sum_{q=1}^3 S_q(\omega, k_1, k_2)k_q\right] 2\pi}{(3\nu/2 + \zeta)k_s^2} / k_s(\theta_r, \varphi_r) r(\theta_r, \varphi_r). \\
 \Phi &= -k_s(\theta_r, \varphi_r)r(\theta_r, \varphi_r)[\sin \theta_r \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_r) + \cos \theta_r \cos \theta - 1] = \\
 &= k_s(\theta_r, \varphi_r)r(\theta_r, \varphi_r)[(\varphi - \varphi_r)^2 \sin \theta \sin \theta_r + (\theta - \theta_r)^2] / 2; \\
 \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_3, \theta_r, \varphi_r)}{\partial \theta} &= 0; \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_3, \theta_r, \varphi_r)}{\partial \varphi} = 0; \theta_r = \theta_r(x_1, x_2, x_3); \varphi_r = \varphi_r(x_1, x_2, x_3) \\
 k_s &= k_s(\theta_r, \varphi_r); x_1 = r(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \cos \varphi_r; x_2 = r(\theta_r, \varphi_r) \sin \theta_r \sin \varphi_r; x_3 = r(\theta_r, \varphi_r) \cos \theta_r; \\
 S_p &= ic_s^2 k_p(\theta_r, \varphi_r)
 \end{aligned} \tag{8}$$

В случае не стационарной задачи ламинарное решение имеет действительное решение. Турбулентное решение имеет действительное и комплексное решение, и реализуется переход к турбулентному режиму при двойном корне,

т.е. когда квадратный корень нулевой. Действительное ламинарное решение и комплексное турбулентное – это идеология, разработанная в [1], [2].

Было вычислено отдельно турбулентное и ламинарное решение. Но дело в том, что ламинарное и турбулентное решение отличается по своим свойствам, ламинарное не реагирует на шероховатости границы, а турбулентное зависит от шероховатости. Поэтому необходимы две разные формулы для турбулентного и ламинарного режима. Кроме того, графики Никурадзе зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса при разной степени шероховатости в ламинарной области следуют линейному решению, без учета нелинейности. Причем линейное решение не зависит от степени шероховатости. А для комплексного турбулентного решения, мнимая часть (квадратный корень) зависит от степени шероховатости. Наступление турбулентного решения связано с двойным корнем, который получается при равенстве нулю квадратного корня. А формула турбулентного решения зависит от квадратного корня, значит и от степени шероховатости. Значит в ламинарном режиме от квадратного корня надо избавиться, перейдя к линейному решению.

Но турбулентный режим не описывается, без учета степени шероховатости. Учет песочной шероховатости произведен в [1], но другие типы шероховатости ждут своего решения.

Но как изменятся углы при разных направлениях скорости. Формула следующая

$$\theta_1 = \theta, \varphi_1 = \varphi; \theta_2 = \theta, \varphi_2 = \varphi \pm \frac{\pi}{2}; \theta_3 = \theta \pm \frac{\pi}{2}, \varphi_3 = \varphi$$

Причем знаки у добавок определяются выбором системы координат относительно углов θ, φ , одинаковые знаки в случае правой системы координат, и разные знаки в случае левой, если скорость тела направлена в положительном направлении. Причем в случае правой системы координат знак добавки совпадает с положительного знаком угла, если скорость тела

направлена в положительном направлении. Получается, что решения по разным осям будут разные даже в случае сферы.

Литература

1. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.<https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf>
2. Якубовский Е.Г. Исследование решения уравнения Навье – Стокс II «Энциклопедический фонд России», 2019, 76 стр. http://russika.ru/userfiles/390_1590711837.pdf