Решение систем обыкновенных нелинейных уравнений второго порядка с учетом дискретного излучения

Е.Г. Якубовский.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Аннотация

Системы нелинейных уравнений в частных производных сводятся к системе нелинейных уравнений с счетным количеством неизвестных и уравнений. С помощью редукции удается свести их к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье исследуются уравнения с частной производной второго порядка как по времени, так и по координате. Волновое уравнение в частных производных сводится к нелинейному уравнению. Для этого нелинейного уравнения и строилось решение. Удалось построить общую формулу решения относительно функции времени с помощью координат положения равновесия. Получены условия, когда происходит излучение энергии, как непрерывное, так и дискретное.

1. Сведение системы квазилинейных уравнений в частных производных к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Решение систем уравнений в частных производных с первой производной по времени исследовано в [1]. Системы уравнений с частной производной по времени второго порядка исследованы в [2].

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}+\sum_{l,n=1}^{L}[a_{0nl}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}a_{1nls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l\,\partial x_n}+$$
$$+\sum_{l=1}^{L}[b_{0l}(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}b_{1ls}(x_1,...,x_3)U_s+...]\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+ \qquad .$$
$$+[c_0(x_1,...,x_3)+\sum_{s=1}^{L}c_{1s}(x_1,...,x_3)U_s+...]U_k=d_k(x_1,...,x_3),k=1,...,L$$

Решение ищем с помощью подстановки в дифференциальное уравнение функции $\mathbf{U}(t,x_1,...,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{b}_n(t)\varphi_n(x_1,...,x_3)$. При этом величина $d_k(x_1,...,x_3)$, это внешнее воздействие. Для решения этого уравнения подставляем разложение функции решения в уравнение в частных производных, умножаем на величину $\varphi_s(x_1,...,x_3)$ и интегрируем по пространству. Получим дифференциальное уравнение (1). Функции $\varphi_n(x_1,...,x_3)$ выберем синусоидальными, тогда если решение непрерывная функция, то коэффициенты ряда убывают как величина $1/n^2$, и процесс редукции возможен.

Исследуем нелинейное обыкновенное уравнение со второй производной по времени, где при действительных аргументах $b_1,...,b_N$ уравнение имеет однозначную правую часть

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N),s=1,...,N. \qquad (1)$$

Системы уравнений, содержащие первую производную по времени в правой части, приводятся к виду (1). Допустим, имеем уравнение

$$\frac{d^2 b_s}{dt^2}=F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt}),s=1,...,N.$$

Продифференцируем его по времени, получим

$$\frac{d^3 b_s}{dt^3}=\frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\frac{db_k}{dt}+\frac{\partial F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})}{\partial b_k}\times$$

$$\times F_s(b_1,...,b_N,\frac{db_1}{dt},...,\frac{db_N}{dt})$$

Введя новые переменные $y_n = b_n, y_{n+N} = \frac{db_n}{dt}, n = 1,...,N;$, получим систему уравнений с новыми координатами равновесия

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_s(y_1,...,y_{2N}), s = 1,...,2N .$$

Если величина $F_s(b_1,...,b_N,0,...,0) = 0, s = 1,...,N$ допускает конечное количество совокупностей корней, то систему можно представить в виде

$$\frac{dy_{s+N}}{dt} = F_s(y_1,...,y_N,y_{N+1},...,y_{2N}), s = 1,...,N$$
$$\frac{dy_s}{dt} = y_{s+N}; y_s = b_s, y_{s+N} = \frac{db_s}{dt} \qquad .$$

С координатами положения равновесия

$$\begin{gathered} F_s(\beta_1^k,...,\beta_N^k,0,...,0) = 0, k = 1,...,K \\ y_{s+N} = \beta_{s+N}^1 = 0; s = 1,...,N \end{gathered} .$$

Матрица этого преобразования имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Собственные числа этого линейного преобразования определятся из уравнения $\lambda^4 - a_{11}\lambda^2 - a_{22}\lambda^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. В случае произвольного порядка матрицы имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b - dc^{-1}a \\ c & d \end{vmatrix} = |c| \cdot \left|b - dc^{-1}a\right| = |c|\left|E - c^{-1}\lambda^2\right|$$

Где матрица $c_{sk} = \frac{\partial F_s}{\partial x^k}, b_{sk} = \delta_{sk}, a_{sk} = d_{sk} = -\lambda\delta_{sk}$. Т.е. корень равен $\lambda = |\Lambda_\alpha^{1/2}|\exp(i\alpha/2 + \pi ip), p = 0,1$ и наряду с корнем $\lambda = |\Lambda_\alpha^{1/2}|\exp(i\alpha/2)$ имеется корень $\lambda = -|\Lambda_\alpha^{1/2}|\exp(i\alpha/2)$ в случае $p = 0$ и $p = 1$. Т.е. в любом случае положение равновесия не устойчиво, кроме случая $\alpha = \pi(2k+1)$, когда наблюдается фазовая траектория типа центр.

2. Решение системы нелинейных уравнений

Теорема 1. Рассматривается задача Коши при произвольных действительных начальных условиях для системы нормальных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Она имеет конечное число не кратных положений равновесия. Случай вырожденного решения задачи Коши – положения равновесия, не рассматривается. В случае если у системы (1) имеются комплексно-сопряженные положения равновесия с действительной частью, то при конечном аргументе t действительное решение задачи Коши системы (1) при действительных начальных условиях стремится к бесконечности, при этом комплексное решение конечно.

Доказательство.

Приведем правую часть этого уравнение к уравнению в собственных значениях, воспользовавшись преобразованием $b_s(t) = \sum_l g_{sl} c_l(t)$, где величина собственных векторов g_{sl} и собственных чисел Λ_l определяется из уравнений $|\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^2 \delta_{sn}| = 0, (\frac{\partial F_s}{\partial b_s} - \Lambda_k^2 \delta_{sn}) g_{nk} = 0$.

Где величина $\frac{\partial F_s}{\partial b_n}$ определена в координатах положения равновесия системы дифференциальных уравнений. В новых переменных $c_l(t)$ дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 c_l}{dt^2} = (\Lambda_l^s)^2 (c_l - \alpha_l^s) + (c_l - \alpha_l^s)^2 P_l(c_1,...,c_N) = \Phi_l(c_1,...,c_N). \quad (2)$$

Находим координаты положения равновесия этой системы нелинейных дифференциальных уравнений α_l^s, которые определятся из уравнений $\Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s)=0, l=1,...,N$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2c_l}{dt^2}=\exp[H_l(t)]\prod_{s=1}^{S}(c_l-\alpha_l^s). \quad (3)$$

Где величина

$$\exp[H_l(t)]=\frac{\Phi_l(c_1,...,c_N)}{\prod_{s=1}^{S}(c_l-\alpha_l^s)}=\frac{P_l(c_l)}{\prod_{s=1}^{S}(c_l-\alpha_l^s)}=c.$$

Из существования первых интегралов следует, что правую часть можно представить в виде зависимости от одной переменной, при этом время определится с точностью до постоянного множителя. При этом можно провести масштабирование переменных. Неизвестная функция определится с точностью квадрата модуля. При этом координаты положения равновесия и начальное условие умножится на квадрат масштабирующего времени.

При подстановке этой функции в дифференциальное уравнение (3), получим уравнение (2). Если нет кратных положений равновесия, в точке положения равновесия множитель $\exp[H_l(t)]$ равен

$$\exp[H_l(t)]=\frac{\partial\Phi_l(\alpha_1^s,...,\alpha_N^s)/\partial c_l}{\prod_{n=1}^{s-1}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)\prod_{n=s+1}^{S}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)}=\frac{(\Lambda_l^s)^2}{\prod_{n=1}^{s-1}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)\prod_{n=s+1}^{S}(\alpha_l^s-\alpha_l^n)}.$$

Причем, так как нет кратных положений равновесия, величина Λ_l^s не равна нулю, и значит, множитель $\exp[H_l(t)]$ в ноль не обращается в координатах положения равновесия.

Получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2c_l}{dt^2}=\prod_{s=1}^{S}(c_l-\alpha_l^s) \qquad (6)$$

Умножаем это уравнение на величину $\frac{dc_l}{dt}$ и интегрируем по c_l. Получим величину первого интеграла

$$H_l = (\frac{dc_l}{dt})^2 / 2 - \int\limits_{c_l^0}^{c_l} D(c_l) dc_l = (\frac{dc_l}{dt})^2 |_{t=t^0} / 2 . \qquad (7)$$

При значении скачка от значения c_l^1 до значения c_l^2 получим выделившуюся кинетическую энергию

$$\Delta E_k = \sum_{l=1}^{N} \Delta(\frac{dc_l}{dt})^2 / 2 = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{c_l^1}^{c_l^2} D(c_l) dc_l . \qquad (8)$$

Разделим дифференциальное уравнение (6) на правую часть и полученную дробь разложим на сумму простых дробей. Получим

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s d^2 c_l}{c_l - \alpha_l^s} = dt_l^2 \qquad (9)$$

$$\lambda_l^s = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{s-1} (\alpha_l^s - \alpha_l^k) \prod\limits_{k=s+1}^{S} (\alpha_l^s - \alpha_l^k)} .$$

Следует различать величину $d^2 c_l = c_l(t + \Delta t) + c_l(t - \Delta t) - 2c_l(t)$ и величину $dt^2 = (\Delta t)^2$ при условии $\Delta t \to 0$.

При этом имеем $\int\limits_{t^0}^{t} dx \int\limits_{t^0}^{x} dy = (t - t^0)^2 / 2 = p(t)$. $\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = 1$. Или $d^2 p(t) = dt^2$. Причем

имеем $\frac{d^2 (c_l)^2 / 2}{dc_l^2} = 1$, запишем это равенство по-другому

$$\frac{d^2 c_l}{d(\sqrt{2c_l})^2} = 1 \qquad (10)$$

Т.е. равенство (9) и (10) получим

$$d^2 g_l = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s d(\sqrt{2c_l})^2}{c_l - \alpha_l^s} = dt^2 = d^2 p(t) \qquad (9a)$$

Двойной интеграл можно представить в виде $g_l(\sqrt{c_l}) = \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{\sqrt{c_l}} \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{x} f(y) dy dx$ или

имеем в случае положительного значения c_l. В случае отрицательного значения c_l надо брать корень из числа со знаком минус

$$\frac{d^2 g_l(\sqrt{c_l})}{d(\sqrt{c_l})^2} = f(\sqrt{c_l}) = \frac{2\lambda_l^s}{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})} = \\ = \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}(\frac{1}{\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}} - \frac{1}{\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}}) . \qquad (11)$$

Проверяется это равенство путем подстановки $g_l(\sqrt{c_l}) = \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{\sqrt{c_l}} \int\limits_{\sqrt{c_l^0}}^{x} f(y)dydx$ в дифференциальное уравнение (11). Значение интеграла равно

$$g_l(x) = \int\limits_{x_0}^{x} [\ln(y-a) - \ln(x_0 - a) + 2\pi i \Delta n]dy = (y-a)[\ln(y-a) + 2\pi i \Delta n - 1]|_{y=x_0}^{y=x} - \\ -(x - x_0)\ln(x_0 - a)$$

Из равенства (9a), получим $d^2 g_l(c_l) = d^2 p(h_l)$, откуда имеем $g_l(c_l) = p(t), g_l(c_l^0) = p(t^0) = 0$,

$$\frac{dg_l}{dt}|_{t=t^0} = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[\ln(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})]\frac{dc_l}{2\sqrt{c_l}dt}|_{t=t^0} = \frac{dp}{dt}|_{t=t^0} = a_l$$

Откуда следует начальное условие для величины $\frac{dp_l}{dt}|_{t=t^0}$. Записав это равенство для произвольного значения t, получим формулу для определения dc_l/dt.

Интегрируя (11), получим

$$g(c_l) = \sum_{s=1}^{S} \{\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i p_l^s - 1] - \\ -(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i q_l^s - 1] - \\ -(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i p_l^s - 1] + \\ +(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) + 2\pi i q_l^s - 1] - \\ -(\sqrt{c_l} - \sqrt{c_l^0})[\ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})\} = (t - t^0)^2/2 + a_l(t - t^0) = p(t)$$

Где имеющие одинаковую структуру значения логарифма имеют одинаковую мнимую часть. Произведя элементарные преобразования по суммированию коэффициентов при целых числах, получим

$$g(c_l)=\sum_{s=1}^{S}\ [\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]+$$

$$+4\pi i\sqrt{\alpha_l^s}\,\Delta n_l^s-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}= \quad .(12)$$

$$=(t-t^0)^2/2+a_l(t-t^0)=p(t),$$

$$n_l^s=q_l^s-p_l^s$$

Эта формула получена в предположении, что состояния в начальный и текущий момент времени не одинаковы, и поэтому может быть разная мнимая ветвь логарифма. Это происходит в случае, если система может излучить энергию и тогда, начальное и конечное состояние имеют разную ветвь логарифма и решение зависит от целого числа.

Определим первый интеграл, зависящий от времени

$$\sum_{s=1}^{S}\ [\frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})]+$$

$$+4\pi i\sqrt{\alpha_l^s}\,\Delta n_l^s-(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})-\ln(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})]\}=$$

$$=(t-t^0)^2/2+a_l(t-t^0)=p(t)$$

Упростим данное уравнение, получим формулу

Введем новую переменную $\sqrt{c_l}=\sqrt{c_l^0}+f_l$. Получим формулу

$$(t-t^0)^2/2+a_l(t-t^0)=\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n[f_l(t-t_0)]^n/n!$$

$$n_l^s=q_l^s-p_l^s;$$

$$\beta_n=\sum_{s=1}^{S}\ \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[\frac{(-1)^n(n-1)!}{(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})^{n-1}}-\frac{(-1)^n(n-1)!}{(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})^{n-1}}];n=2,...,\infty$$

Задача свелась к вычислению корня полинома.

Выведем формулу для решения в действительной плоскости. Опуская индексы, преобразуем формулу, суммируя с комплексно сопряженной формулой

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda(\sqrt{c}/\sqrt{\alpha}-1)\ln(\sqrt{c}-\sqrt{\alpha})=\mathrm{Re}\,2(\lambda_r+i\lambda_i)[\sqrt{c(\alpha_r-i\alpha_i)/(\alpha_r^2+\alpha_i^2)}-1]\times$$
$$\times\{\ln[(\sqrt{c}-\beta_r)^2+\beta_i^2]^{1/2}+i\frac{\pi}{2}+i\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}\}=$$
$$=2[\lambda_r(\sqrt{c}\gamma_r-1)+\lambda_i\sqrt{c}\gamma_i]\ln[(\sqrt{c}-\beta_r)^2+\beta_i^2]-2[\lambda_i(\sqrt{c}\gamma_r-1)-\lambda_r\sqrt{c}\gamma_i]\times$$
$$\times[\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}],\beta_r+i\beta_i=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}+\alpha_r}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}-\alpha_r}{2}}$$
$$\gamma_r+i\gamma_i=\frac{\beta_r-i\beta_i}{\sqrt{\alpha_r^2+\alpha_i^2}}$$

Разрешая это уравнение относительно величины аргумента $\arctan\frac{\sqrt{c}-\beta_r}{\beta_i}$, получим

$$\frac{\sqrt{c_l}-\beta_{lr}^s}{\beta_{li}^s}=\tan[-\frac{(t-t^0)^2/2+a_l(t-t^0)}{2[\lambda_{li}^s(\sqrt{c_l}\gamma_r-1)-\lambda_{lr}^s\sqrt{c_l}\gamma_i]}+\delta_l] \quad (13)$$

Эта функция при наличии комплексных координат положения равновесия стремится к бесконечности при решении в действительной плоскости. При этом комплексное решение конечно. Допустим, левая часть ограничена. Для этого необходимо, чтобы $|\frac{(t-t^0)^2/2+a_l(t-t^0)}{2[\lambda_{li}^s(\sqrt{c_l}\gamma_r-1)-\lambda_{lr}^s\sqrt{c_l}\gamma_i]}|<\frac{\pi}{2}-\delta_l$. Т.е. необходимо, чтобы $\lim\limits_{h_l\to\infty}\sqrt{c_l}=\infty$, приходим к противоречию с ограниченностью левой части.

Но уравнения движения небесных тел имеют точку ветвления. Если записать уравнение движения

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{V}_l}{dt}&=\mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)\\ \frac{d\mathbf{r}_l}{dt}&=\mathbf{V}_l\end{aligned}\quad. \qquad (14)$$

То при скорости $\mathbf{V}_l=0$ движения они допускают точку ветвления

$$-\frac{d\mathbf{V}_l}{dt} = \mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)$$
$$\frac{d\mathbf{r}_l}{dt} = -\mathbf{V}_l \quad , \qquad (15)$$

приводящую к замкнутости траектории тел с отрицательной энергией. Уравнения движения для обоих уравнений (14) и (15) имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_l}{dt^2} = \mathbf{F}_l(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N)$$

Т.е. получается, что точка ветвления этого уравнения делает возможным действительное решение. Если же ветвление решения не учитывать и считать одну ветвь решения, то получается бесконечное действительное решение.

У решения системы (6) можно понизить порядок интегрирования, для чего умножим его на величину $V_l = \frac{dc_l}{dh_l}$, получим

$$\frac{d}{dh_l}[V_l^2/2 - \int D_l(c_l)dc_l] = 0\,.$$

Разрешая это уравнение относительно V_l, получим

$$\frac{dc_l}{dh_l} = V_l = \sqrt{(\frac{dc_l}{dt})^2 |_{t=t_0} + 2\int_{c_l^0}^{c_l} D_l(x_l)dx_l} = \sqrt{\prod_{k=1}^{K} (c_l - \beta_l^k)}\,. \quad (16)$$

Где действительные значения β_l^k растут с ростом индекса k. Причем возможны две ветви решения, положительная и отрицательная. Причем величина $c_l \in [\beta_l^k, \beta_l^{k+1}]$, где решение действительно. Если знак корня положителен, то величина c_l растет, достигает значения β_l^{k+1}. Знак корня становится отрицателен, и величина c_l убывает, до значения β_l^k, чтобы вновь расти.

Причем, так как для уравнения движения в гравитационном поле достижение нуля для величины подкоренного выражения в гравитационном поле при большой скорости требует большого времени, будет долго продолжаться счет в действительной плоскости. Необходимо изменить знак квадратного корня для увеличения значения подкоренного выражения, в противном случае решение станет комплексным, и так как счет идет в действительной плоскости, будет стремиться к бесконечности. Численное решение будет несколько проскакивать через ноль, меняя знак корня, при этом будет расти кинетическая энергия, и в результате тело будет обладать положительной энергией и покинет эллиптическую траекторию. Если же тело будет точно менять в нуле скорости знак корня, то тело будет иметь стационарную орбиту.

Какое решение будет реализовываться в эксперименте, зависит от случайных флуктуаций решения в окрестности нуля скорости в некоторой системе координат. При многократном повторении нуля скорости в результате будет реализовано комплексное решение, а численный счет в действительной плоскости приведет к бесконечному решению. В этом случае нужно переходить к комплексному конечному решению.

Используя тождество $\sum_{s=1}^{S} \lambda_l^s = 0$ и рассматривая большие значения c_l получим равенство

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})] + \\ + 4\pi i \lambda_l^s \Delta n_l^s = (t - t^0)^2 / 2 + a_l (t - t^0) = p(t).$$

из этого равенства следует, что при росте времени модуль переменной c_l растет, т.е. происходит расширение Вселенной. При длительном расширении величина $c_l = (h_l - h_l^0)^4 / \Lambda_l^2$. Взяв производную по времени от суммы модулей координаты получим, производную от радиуса расширения материи

$$\frac{dc_l}{dt} = 4 c_l^{3/4} / \Lambda_l^{1/2}$$

$$\Lambda_l = \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_l^s}{\sqrt{\alpha_l^s}}[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})] >> 1.$$

Но при переходе с одной ветви решения на другую по формуле (15) или (16) координата уравнения движения в среднем не растет. При использовании одной ветви решения координата растет. Если рассматриваются галактики на большом расстоянии, то разность между координатами положения равновесия велика, и система не доходит до точки ветвления и наблюдается одна ветвь решения и значит координата растет. Если расстояния малы, то другая ветвь решения достигается быстро, скорость разбегания мала и постоянна по модулю и разбегание не наблюдается, и координата в среднем не растет.

Потенцируя выражение (12), получим

$$\prod_{s=1}^{S}\frac{(\sqrt{c_l}-\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}-1)}(\sqrt{c_l^0}+\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}+1)}}{(\sqrt{c_l}+\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}+1)}(\sqrt{c_l^0}-\sqrt{\alpha_l^s})^{\lambda_l^s(\sqrt{c_l}/\sqrt{\alpha_l^s}-1)}}\times \tag{17}$$

$$\times\exp(4\pi i\lambda_l^s n_l^s)=\exp[(t-t^0)^2/2+a_l(t-t^0)]$$

Это уравнение может привести к изменению монотонности у функции t, вместо возрастания будет убывание функции $h_l(t)$ или наоборот. Величина t может быть периодической функцией времени.

Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l=\int_{h_l^0}^{h_l}(-\mathrm{H}_l dt+p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l=-d\arg c_l$. Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется t, равна нулю, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l=-\frac{\partial S_l}{\partial t}, p_l=\frac{\partial S_l}{\partial c_l}$. Действие для каждого дифференциального уравнения определяется по формуле

$$S_l=\int_{h_l^0}^{h_l}(-\mathrm{H}_l dt+p_l dq_l);$$

При этом приращение действия в случае комплексного решения равно $dS_l = -d\arg c_l$. Значит, в случае ламинарного действительного решения функция Гамильтона H_l, вычисленная по этим безразмерным формулам, где вместо времени используется t, равна нулю, что и является первыми интегралами. Из этих формул имеем $\mathrm{H}_l = -\frac{\partial S_l}{\partial t}, p_l = \frac{\partial S_l}{\partial c_l}$.

$$\mathrm{H}_l = \frac{\partial \arg c_l}{\partial t} = \frac{\partial \arctan \frac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial t} = \frac{-\operatorname{Im} c_l \frac{\partial \operatorname{Re} c_l}{\partial t} + \operatorname{Re} c_l \frac{\partial \operatorname{Im} c_l}{\partial t}}{(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}.$$

$$p_l = -\frac{\partial \arg c_l}{\partial c_l} = -\frac{\partial \arctan \frac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial c_l} = -\frac{1}{2[1 + (\frac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l})^2]}\left(\frac{\partial \frac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial \operatorname{Re} c_l} + \frac{\partial \frac{\operatorname{Im} c_l}{\operatorname{Re} c_l}}{\partial i \operatorname{Im} c_l}\right) =$$
$$= \frac{\operatorname{Im} c_l + i \operatorname{Re} c_l}{2[(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2}$$

Где воспользовались формулой $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} z} + \frac{\partial}{\partial i \operatorname{Im} z}\right)$, см. [5] раздел 2.1. Разрешая относительно $h_l - h_l^0$ уравнение (17), продифференцируем полученное значение по величине h_l, получим $F_l(c_l)\frac{dc_l}{dh_l} = 1$, откуда имеем N первых интегралов, содержащий функцию Гамильтона

$$\mathrm{H}_l(c_l, h_l, a_l) + H_l = \frac{-\operatorname{Im} c_l \operatorname{Re} \frac{1}{F_l(c_l)} + \operatorname{Re} c_l \operatorname{Im} \frac{1}{F_l(c_l)}}{(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2} + H_l = P_l, \quad (18)$$
$$p_l = \frac{\operatorname{Im} c_l + i \operatorname{Re} c_l}{2[(\operatorname{Re} c_l)^2 + (\operatorname{Im} c_l)^2} = \frac{i}{2c_l};$$

Т.е. имеется N первых интегралов, зависящих от t.

Из второго уравнения (18) определим импульс p_l. Второй член левой части первого уравнения (18) назовем материальным значением энергии (так как она равна значениям суммы кинетической и потенциальной энергии), а первый член левой части полевым значением энергии, так как она определяется мнимой фазой решения. При этом первый интеграл зависит от

2 констант P_l, a_l. В случае действительного положительного значения c_l, P_l, α_l^s имеем первый интеграл - функцию Гамильтона

$$\mathrm{H}_l = 0; H_l = P_l; l = 1,...,N.$$

Первая формула (18) это закон сохранения энергии с учетом излучения.

При этом правая и левая часть первого уравнения (18) может быть комплексной. Но при скачкообразном изменении первого члена левой части (18), скачком изменится и второй член, причем величины P_l, a_l останутся неизменными, т.е. константы первого интеграла останутся неизменными.

Эта формула получена в предположении, что начальное и конечное состояние решения не одинаковы. Если между ними произошло излучение, то распределение энергии системы изменится в соответствии со значением логарифма и появится зависимость от целого числа n_l^s, соответствующая разным ветвям логарифма. При этом определится значение c_l как функция квантового числа n_l^s из уравнений (17). Определение решения по формуле (17) может содержать точки ветвления решения. Но при этом вторая производная от решения стремится к бесконечности в силу наличия точки ветвления, и значит, нарушаются условия единственности и существования решения задачи Коши этого обыкновенного дифференциального уравнения. При этом сходящийся ряд, описывающий решения в точке ветвления не существует, значит, решение задачи Коши в комплексной плоскости в точке ветвления не существует, а происходит скачок решения. Но первый интеграл энергии продолжает существовать, и сумма энергии поля и материи неизменна.

Переход с одного значения целого числа на другое связан с изменением фазы аргумента

$$\begin{gathered}\{(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l} - \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})] - \\ -(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s})[\ln(\sqrt{c_l} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s})]\}/(4\pi\sqrt{\alpha_l^s}i)\} = n_l^s \quad (19) \\ \sqrt{c_l}[\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})]/(4\pi i)\} = n_l^s - i\eta;\end{gathered}$$

При условии $c_l \to \infty$ получаем асимптотическую формулу

$$\sqrt{c_l} = \frac{\pm 4\pi i n_l^s + 4\pi\eta}{\ln(\sqrt{c_l^0} + \sqrt{\alpha_l^s}) - \ln(\sqrt{c_l^0} - \sqrt{\alpha_l^s})} = ib(n_l^s - i\eta)$$

Значение координаты, при котором образуется скачок. Причем нужно учитывать разные листы римановой поверхности.

При этом безразмерный импульс и энергия излучения равны

$$\mathrm{H}_l(c_l, h_l, a_l) = \frac{\mathrm{Im}(N^2)\,\mathrm{Re}\dfrac{1}{F_l(-N^2)} - \mathrm{Re}\, N^2\, \mathrm{Im}\dfrac{1}{F_l(-N^2)}}{N^4}.$$

$$p_{n_l^s} = \frac{i}{2c_l} = -\frac{i}{2N^2}; N^2 = b^2(n_l^s - i\eta)^2$$

Импульс у электрона в атоме водорода является мнимым $p_l = -i\hbar\dfrac{\partial \ln\psi}{\partial x^l}$, где волновая функция является действительной.

Как только телу сообщают полевую энергию изменяется значение энергии системы P_l, происходит перестройка целого числа, изменение на единицу, и как следствие скачок решения задачи при неизменном значении a_l и связанных значениях c_l, h_l в первом интеграле (18) и проявится зависимость $c_l = c_l(n_l^s)$. Скачок решения определяется зависимостью $c_l = c_l(n_l^s)$ при неизменных константах a_l в первом интеграле (18). При этом скачкообразное изменение материальной части энергии H_l компенсируется изменением излучения H_l. Но излучение энергии может произойти и при неизменном значении P_l за счет изменения квантового числа n_l^s. При этом изменится как материальная, так и полевая часть энергии, причем их сумма останется неизменной.

В случае положительных действительных значений c_l, α_l^s материальная часть энергии H_l сохраняется и никаких скачков не будет, величина n_l^s неизменна. Излучение в этом случае будет непрерывное, связанное с ускоренным движением тела, причем величины $H_l = P_l$ будут увеличиваться, так как произойдет внешнее материальное воздействие. Излишек энергии будет излучаться. При наличии мнимой части решения полевой интеграл H_l равен константе, значит и материальный H_l тоже равен константе и непрерывного излучения не будет.

Но о каком излучении энергии идет речь. Уравнения записаны в безразмерном виде и описывают коэффициенты ряда, являющегося решением квазилинейных уравнений в частных производных со второй производной по времени. Нелинейно уравнение Навье – Стокса в релятивистском и не релятивистском виде. При этом линейное волновое уравнение Клейна-Гордона запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (y^0)^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial (y^k)^2} = \psi, y^k = x^k \frac{mc}{\hbar}.$$

Сводится к нелинейному уравнению, относительно $u = \ln \psi$. Такое преобразование неизвестной функции сводится к непосредственному учету действия S, определяемого из уравнения $\psi = \exp(iS/\hbar)$. Воспользуемся равенством $\frac{\partial^2 \psi}{\partial (y^k)^2} = \psi[\frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial (y^k)^2} + (\frac{\partial \ln \psi}{\partial y^k})^2]$, получим

$$\psi[\frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial (y^0)^2} + (\frac{\partial \ln \psi}{\partial y^0})^2] - \psi[\frac{\partial^2 \ln \psi}{\partial (y^k)^2} + (\frac{\partial \ln \psi}{\partial y^k})^2] = \psi .$$

Сокращаем это уравнение на величину ψ, получим аналог нелинейного релятивистского уравнения Навье – Стокса относительно действия S, являющегося потенциалом уравнения Навье - Стокса

$$i\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial (y^0)^2} - (\frac{\partial S}{\partial y^0})^2 - \sum_{k=1}^{3} [i\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial (y^k)^2} - (\frac{\partial S}{\partial y^k})^2] = \hbar^2$$

Решение волнового уравнения можно свести к нелинейному уравнению, применив к нелинейному уравнению предлагаемую теорию

$$\frac{\partial^2 A_l}{\partial (y^0)^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 A_l}{\partial (y^k)^2} = -4\pi j_l \, .$$

Сводится к нелинейному уравнению, относительно $u_l = \ln A_l$. Воспользуемся равенством $\frac{\partial^2 A_l}{\partial (y^k)^2} = A_l [\frac{\partial^2 \ln A_l}{\partial (y^k)^2} + (\frac{\partial \ln A_l}{\partial y^k})^2]$, получим

$$\exp(u_l)[\frac{\partial^2 u_l}{\partial (y^0)^2} + (\frac{\partial u_l}{\partial y^0})^2] - \exp(u_l) \sum_{k=1}^{3} [\frac{\partial^2 u_l}{\partial (y^k)^2} + (\frac{\partial u_l}{\partial y^k})^2] = -4\pi j_l \, .$$

Получим излучение комплексного параметра u_l, а значит и величины $A_l = \exp(u_l)$. При этом решение этого уравнения имеет отрицательное значение u_l или малое положительное значение, т.е. величина A_l конечна.

Отметим, существование частных случаев комплексного решения при разных значениях энергии. Так у дифференциального уравнения имеется особенность

$$\ddot{q} + \omega^2 (q^3 - q/2) = 0 \, . \qquad (20)$$

В которой имеется комплексное конечное решение $q(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \alpha \exp(i\omega t)}{1 + \alpha \exp(i\omega t)}$ при действительных координатах положения равновесия. Но это решение особое, оно не удовлетворяет произвольным начальным условиям, так как зависит от одной константы. Оно является решением уравнения при частном случае начальных условий, при условии $E = 0$.

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{\omega^2 (q^4 - q^2)}{4} = 0 \, .$$

А это дифференциальное уравнение имеет точку ветвления и две ветви аналитической функции, которой равна правая часть дифференциального уравнения. При другом значении энергии комплексного решения уравнения (20) нет. Оно имеет при других значениях энергии конечное действительное решение.

Выводы

Нелинейные уравнения в частных производных со второй производной по времени, в случае комплексных координат положения равновесия, эквивалентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, допускают только дискретное излучение энергии. При этом сумма материальных и полевых значений энергии сохраняется. При малых значениях безразмерных параметров, когда координаты положения равновесия действительны и все одного знака, и значит, решение действительно, имеется непрерывное излучение за счет ускоренного движения. Проверить выводы из решения дифференциальных уравнений можно экспериментально, при малом токе излучения непрерывно. При малой силе тока наблюдается ламинарное действительное решение, и дискретного излучения в этом случае нет. Но в случае колебания с комплексным значением $\sqrt{c_l}$ может появиться дискретное излучение, так как полевой член в выражении для энергии не нулевой. При большой силе тока имеются комплексные координаты положения равновесия, и наблюдается дискретное излучение.

Список литературы

1. Якубовский Е.Г. Комплексные ограниченные решения уравнений в частных производных. Материалы международной научно-практической конференции. Теоретические и практические аспекты естественных и математических наук. Новосибирск: Изд. «Сибак», 2012, с. 19-30. http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/5809-2013-01-17-07-57-12

2. Якубовский Е.Г. Комплексные решения уравнений в частных производных. Международный независимый институт Математики и Систем

«МиС», №8, 2014, с. 60-66 http://math-systems.ru/files/Arhiv/19-20.09.2014/mis8.pdf#page=66

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика Нерелятивистская теория т.III, Наука, М.,1969,768с.

4. *Якубовский Е.Г.* Физический смысл уравнений квантовой механики, электродинамики и уравнения ОТО. «Энциклопедический фонд России». 2014г., 65с., http://russika.ru/sa.php?s=890

5. Вергелес С.Н. Лекции по квантовой электродинамике М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008г., 248стр.