Новые свойства квантовой механики в комплексном пространстве

Якубовский Е.Г.

e-mail yakubovski@rambler.ru

Оглавление

Аннотация

Существуют две разные версии квантовой механики, в действительном и комплексном пространстве. Мнимая часть комплексного параметра описывает среднеквадратичное отклонение и ее можно подставлять в соотношение неопределенности. Комплексное решение приближенное, его действительная часть описывает среднее см. [2]. При этом в квантовой теории можно определить среднюю траекторию и удовлетворить соотношению неопределенности. При этом имеется аналогия с турбулентным решение, которое тоже комплексное см. [5], [6], [7]. Обе эти теории содержат дисперсию и среднее и описываются комплексным решением. Комплексное решение квантовой механики позволило вычислить дискретные моменты времени, координаты и импульсы, энергию. Позволило установить связь между квантовой теорией (для элементарных частиц и тел большой массы) и ОТО (для электромагнитного поля в случае элементарных частиц, и для гравитационного поля в случае планет и звезд). Электромагнитное уравнение ОТО описано в [8]. В 4 главе описана связь между элементарными частицами и частицами большой массы. Причем частицы большой массы связаны с массами планет с помощью безразмерного постоянного коэффициента. По-видимому, частицы большой массы являются затравкой для образования планет и звезд.

1. Две разные ветви квантовой механики

Существует две ветви квантовой механики, с действительным и комплексным пространством. Между ними граница, как между действительным ламинарным режимом и комплексным турбулентным режимом. Но нет критического числа Рейнольдса. Операторы действительного режима - самосопряженные и для комплексного режима - общего вида.

В действительной квантовой механике делаются попытки использовать для описания энергии, импульса и времени мнимые величины, но это вынужденные, силовые усилия. Собственные значения самосопряженных операторов действительные. Комплексные величины не могут быть собственными значениями операторов, так как они содержат мнимую часть, физический смысл которой переменная величина. Комплексные решения – это функции, описывающие траектории частиц в комплексном пространстве, аналог турбулентных линий тока, причем мнимые части удовлетворяют соотношению неопределенности.

Сначала я просто использовал формулу связи между квантовой механикой и уравнением Навье-Стокса, $V_k = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k}$, где используется скорость из уравнения Навье-Стокса, и волновая функция квантовой механики. Потом построил комплексное скорости квантовой механики, определив линии тока.

Уравнение Шредингера сводится к уравнению Навье – Стокса. Докажем это. Для чего запишем уравнение Шредингера и преобразуем его воспользовавшись тождеством $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2} = \psi[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2]$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi\sum_{l=1}^{3}[\frac{\partial^2 \ln\psi}{\partial x_l^2} + \frac{1}{\psi^2}(\frac{\partial\psi}{\partial x_l})^2] + U\psi\ .$$

Разделив на массу $m\psi$, получим уравнение

$$i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_l}\right)^2=-\frac{\hbar^2}{2m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_l^2}+U/m\,.$$

Получим уравнение в частных производных, взяв градиент от обеих частей уравнения, введем действительную скорость по формуле $\mathbf{V}=-i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi$.

$$\frac{\partial i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{m^2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_l}\frac{\partial\nabla\ln\psi}{\partial x_l}=\frac{i\hbar}{2m}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 i\frac{\hbar}{m}\nabla\ln\psi}{\partial x_l^2}+\nabla U/m$$

Подставляя значение скорости в преобразованное уравнение Шредингера,

получим

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}+\sum_{l=1}^{3}V_l\frac{\partial V_p}{\partial x_l}=\nu\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2 V_p}{\partial x_l^2}-\frac{\partial U}{\partial x^p}/m,\nu=\frac{i\hbar}{2m}.$$

Получим трехмерное уравнение Навье – Стокса с давлением, соответствующим потенциалу. Но задача гидродинамики отличается от уравнения Навье – Стокса, полученного из уравнения Шредингера, уравнением неразрывности.

Комплексные линии тока определяются по комплексной скорости см. [2]

$$\frac{dx_k}{dt}=\operatorname{Re}V_k(x_1,x_2,x_3)+i\operatorname{Im}V_k(x_1,x_2,x_3),x_k=x_k(t,x_1^0,x_2^0,x_3^0)\,,$$

Действительные линии тока определятся по формуле

$$y_k(t,x_1^0,x_2^0,x_3^0)=\operatorname{Re}x_k(t,x_1^0,x_2^0,x_3^0)+\operatorname{Im}x_k(t,x_1^0,x_2^0,x_3^0)\sin[\arg x_k(t,x_1^0,x_2^0,x_3^0)]$$

Аналогия с турбулентным потоком прояснилась, формулы линий тока аналогичные. Турбулентный поток тоже описывается комплексными скоростями. Действительная часть комплексного решения – это среднее, а мнимая часть – это среднеквадратичное отклонение см. [2]. И то, и другое есть в квантовой механике и турбулентном потоке. Отличие в деталях, квантовая механика использует электромагнитную энергию, а турбулентный поток – гидродинамическую, звуковую. Кинематическая вязкость квантовой механики мнимая и равна $i\frac{\hbar}{2m}$, кинематическая вязкость турбулентного потока действительная.

Но имеется квантовая механика в действительном пространстве. Аналогии в классической физике не имеет. Ламинарное решение тоже действительное, но имеются линии тока, чего нет в квантовой механике в действительном пространстве. Кроме того, ламинарное решение не имеет собственных значений. Ламинарный режим и действительная квантовая механика принципиально отличаются. В квантовой механике используют операторы, в ламинарном режиме нет. В квантовой механике нельзя одновременно вычислить импульс и координату, момент времени и энергию. В ламинарном режиме таких ограничений нет. Если комплексная квантовая механика описывает турбулентный режим частиц вакуума, и поэтому аналогична гидродинамическому турбулентному режиму, то для действительной квантовой механики такой связи нет. По-видимому, сказывается большая скорость электромагнитной волны, звуковая волна имеет гораздо меньшую скорость. Кроме того, разная среда, в квантовой механике средой является разреженный газ, состоящий из мельчайших частиц вакуума, а в гидродинамике массивные, по сравнению с частицами вакуума, элементарные частицы. Причем разница между средой сказывается в действительном ламинарном режиме. Массы ламинарного режима в число Авогадро раз больше масс элементарных частиц, поэтому они не проявляют квантовых свойств. Как следует из свойств частиц вакуума, описание используемого разреженного газа приводит к квантовым законам. Описание планет и звезд тоже приводит к квантовым законам см. [4], средой для них являются элементарные частицы. Отношение между массами квантовой механики и массами частиц среды составляет примерно 10^{40}, как между массами элементарных частиц и средой – частицами вакуума, так и между массами планет, звезд и средой образованной элементарными частицами. Но в случае планет и звезд главное квантовое число огромное см. [8]. Между тем ламинарное приближение линейное, в отличии от турбулентного. В турбулентном режиме квантовой механики и гидродинамики, имеется общее, дисперсия скорости, что проявляется в мнимой части комплексного режима. Кроме того, в обоих случаях турбулентный режим нелинейный, что и вызывает комплексное решение. Но граница между комплексными и действительными скоростями в квантовой механике и гидродинамике одинаково существует.

И та, и другая теория подчиняется преобразованию Лоренца, но квантовая механика со скоростью света, а гидродинамика со скоростью звука. Имеется интервал, электромагнитных и звуковых волн и вывод уравнений Лоренца аналогичен в электромагнитных и звуковых волнах. Скорость возмущения равна групповой скорости для звука, а значит групповой скорости для электромагнитной волны. По поводу преобразования Лоренца есть интернет книга см. [1]. Обе скорости не зависят от скорости центра инерции бесконечной среды. Но имеется отличие, релятивистский знаменатель со скоростью звука относится к присоединенной массе, а со скоростью света к инерционной массе. Формула сложения скоростей справедлива для среды в случае гидродинамики, и для инерционной массы в случае электромагнитной скорости света. Групповая скорость для элементарных частиц совпадает со скоростью света в вакууме.

2. Дискретное время квантовой механики

Комплексное решение уравнений квантовой механики используется для описания потенциальной ямы. Оказалось, что закон сохранения энергии выполняется в комплексной форме при большой постоянной времени, например стационарного процесса, а при малой постоянной времени определяется дискретное время, следовательно дискретный импульс и координата, например при переходе с одного уровня энергии на другой, или столкновения частиц. Это говорит о том, что частицы вакуума образуют элементарные частицы в дискретные, периодические моменты времени при комплексных координатах. В случае использования трех координат, дискретные моменты времени будут не периодические. Причем это общий случай дискретных моментов времени. Все три комплексные координаты зависят от времени и не согласованы, координаты разделяются и удовлетворяют закону сохранения энергии в дискретные моменты времени. В случае квантовой электродинамики дискретен интервал, момент времени, координата, импульс и энергия. При этом происходит переход к непрерывному времени с ростом мнимой части начальных условий, что приводит к комплексным координатам и скорости. Это проявилось при численном эксперименте.

Волновая функция и собственная энергия в случае потенциальной ямы имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x; k = \frac{\pi n}{a}$$
$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Осуществим переход из действительного пространства в комплексное

$$\frac{dx}{dt} = V = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x} = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial(u+iv)} = -i\frac{\hbar}{m}[\frac{\partial \ln\psi}{\partial u} + i\frac{\partial \ln\psi}{\partial v}]/2 .$$

См. преобразование производной по комплексному аргументу в сумму действительной и мнимой части [11]. Если волновая функций зависит только от действительного параметра, то мнимая часть производной равна нулю. Но действительную производную надо разделить пополам или комплексную производную удвоить. Это зависит от того, при комплексных или действительных координатах определяется скорость.

Скорость среды или скорость элементарных частиц описывается по формуле

$$\frac{dx}{dt} = V = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x} = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\cos kx}{\sin kx}\,. \qquad (1)$$

Где используется комплексный аргумент. Это дифференциальное уравнение имеет решение, где мнимая часть опишет среднеквадратичное отклонение, свойство мнимой части решения см. [2]. Причем в комплексном пространстве мнимые части будут связаны с принципом неопределенности

Легко читаемая идея по получению дифференциального уравнения относительно координаты. Она приводит к решению в виде соотношения (2). Действительное решение этого решения не удовлетворяет значению закона сохранения энергии ни в одной точке. Только с ростом мнимой части начальных условий закон сохранения энергии удовлетворяется в дискретных точках, а с бесконечной мнимой частью удовлетворяется тождественно см. (3). При этом нужно учитывать только потенциальную и кинетическую энергия, а квантовый член имеющий при быстротекущих процессах знак плюс и минус при суммировании сокращается. При этом бесконечности мнимой части начальных условий скорость равна константе и действительная часть закона сохранения энергии удовлетворяется тождественно. Это не переход к классическому описанию, это вырождение значения энергии.

Решение этого дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\cos kx = \exp[i\frac{\hbar k^2(t-t_0)}{m}]\cos kx_0 = \beta \qquad (2)$$

Разлагая косинус в комплексные экспоненты, и решая квадратное уравнение, получим

$$kx = -i\ln(\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}) = -i\ln|\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}| + \arg(\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2})$$

Но имеется один аспект закона сохранения энергии в квантовой механике. Имеется дополнительный член в правильном законе сохранения, который приводит к комплексному закону сохранения энергии. Имеем тождество по определению волновой функции

$$\psi(t, x_1, x_2, x_3)\exp(-iEt/\hbar) = \exp[-iEt/\hbar + \sum_{k=1}^{3} \int_0^{x_k} \frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k} dx_k],$$

Подставляем данную волновую функцию в уравнение Шредингера см. [1]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2} + U\psi$$

Получаем первые интегралы уравнения Навье-Стокса, воспользовавшись тождеством $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2} = \psi[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k})^2 + \frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_k^2}]$

$$-E = -i\hbar\frac{\partial\ln\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} [(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k})^2 + \frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_k^2}] - U = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} (k_k^2 + \frac{\partial k_k}{\partial x_k}) - U;$$
$$-E = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} (k_k^2 + \frac{\partial k_k}{\partial x_k}) - U; k_k = \frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k}; p_k = -i\hbar\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k}.$$

Тогда локальный закон сохранения энергии выполняется

$$E = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3} (p_k^2 + i\hbar\frac{\partial p_k}{\partial x_k}) + U.$$

Получается, что закон сохранения энергии выполняется локально, с точностью колебания мнимой части. Комплексный закон сохранения справедлив когда характерный размер системы много больше периода дискретизации. Но при действительной волновой функции импульс является мнимым, и закон сохранения энергии является действительным относительно мнимых частей. При комплексной волновой функции закон сохранения энергии является комплексным. В комплексном пространстве закон сохранения энергии выполняется для верхнего знака плюс-минус.

$$E=\frac{1}{2m}[(\operatorname{Re}p_k)^2-(\operatorname{Im}p_k)^2\mp\hbar\frac{\partial\operatorname{Im}p_k}{\partial x_k}]+U=U-\frac{\hbar^2}{2m}[(\frac{\partial\ln\psi}{\partial x_k})^2\pm\frac{\partial^2\ln\psi}{\partial x_k^2}]=$$

$$=-\frac{\hbar^2k^2}{2m}\{\operatorname{Re}[(\cot kx)^2]\mp\operatorname{Im}(\frac{i}{\sin^2 kx})]\}==-\frac{\hbar^2k^2}{2m}\operatorname{Re}[(\cot kx)^2]\mp(\frac{1}{\sin^2 kx})]=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

$$-\frac{\cos^2 kx}{\sin^2 kx}\pm\frac{1}{\sin^2 kx}=1$$

$$\sin^2 kx+\cos^2 kx=\pm 1;$$

$$\sin^2\operatorname{Re}kx\cosh^2\operatorname{Im}kx-\cos^2\operatorname{Re}kx\sinh^2\operatorname{Im}kx+\cos^2\operatorname{Re}kx\cosh^2\operatorname{Im}kx-\sin^2\operatorname{Re}kx\sinh^2\operatorname{Im}kx=$$

$$=\cosh^2\operatorname{Im}kx-\sinh^2\operatorname{Im}kx=1$$

Получается, что закон сохранения энергии при большом значении характерного времени выполняется при росте времени, т.е. доказано что время растет, а не может убывать при учете квантового члена.

В действительном пространстве закон сохранения энергии не выполняется

$$E=\frac{1}{2m}(\operatorname{Re}p_k)^2+U=-\frac{\hbar^2k^2}{2m}(\cot kx)^2=\frac{\hbar^2k^2}{2m};\cot kx=\pm i$$

Но, во-первых, этот квантовый член (назовем квантовым членом уравнения закона сохранения энергии производную от мнимого импульса) не описывается действительным пространством, в действительном пространстве он не имеет решения. Во-вторых, в комплексном пространстве он линеен по мнимой части импульса, и при изменении хода времени он меняет знак. Дискретное время соответствует остановке времени, и скачком изменении, т.е. ходу времени туда-назад, и этот линейный член в сумме равен нулю. В интервале между скачками, импульс равен константе и производная от него равна нулю.

А если описывать классический непрерывный рост времени, то при характерном времени, большем интервала дискретизации, закон сохранения энергии выполняется в комплексном пространстве при росте времени. Скажу более классическое стационарное решение получено из этого уравнения при непрерывном времени.

Подставляем комплексный угол в уравнение (3), решение будет дискретным периодическим. Закон сохранения энергии ограничивается кинетической и потенциальной энергией, квантовый член в сумме в окрестности дискретной точки сокращается. Комплексное решение не получается, оно сводится к уравнению $\exp(\pm ikx) = 0$ которое не имеет конечного комплексного решения даже при комплексном k.

Действительная часть кинетической энергии частиц в потенциальной яме равна

$$E_{kin} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}[(\mathrm{Re}\cot kx)^2 - (\mathrm{Im}\cot kx)^2] = E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$
$$d = (\mathrm{Im}\cot kx)^2 - (\mathrm{Re}\cot kx)^2 = 1; \lim_{\mathrm{Im}\, x \to \pm\infty} d = 1 \qquad (3)$$

Была составлена программа MATHCARD. Действительное решение приводит к противоречию, мнимая единица равна действительному котангенсу. Начальное значение kx_0 надо брать комплексное, я взял мнимую часть равной 2. Решение колеблется вокруг 1 с малым отклонением при изменении времени за период. Действительное изменение k сказывается только на масштаб задачи. Бесконечность мнимой части начальных условий приводит к тождественному совпадению кинетической энергии собственному значению энергии. Причем выполняется условие при характерном времени сравнимого с периодом дискретизации

$$d = 1 - \frac{1}{\sin^2(kx)} = 1 -$$
$$-\frac{\coth^2 \mathrm{Im}\, kx - \cot^2 \mathrm{Re}\, kx - 2i \coth \mathrm{Im}\, kx \cot \mathrm{Re}\, kx}{\sinh^2 \mathrm{Im}\, kx \sin^2 \mathrm{Re}\, kx[(\coth^2 \mathrm{Im}\, kx - \cot^2 \mathrm{Re}\, kx)^2 + (2\coth \mathrm{Im}\, kx \cot \mathrm{Re}\, kx)^2},$$

т.е. при большой мнимой части начальных условий отклонение от 1 мало и почти равно по модулю, но имеет разный знак. В случае малой мнимой части у начальных условий отклонение от 1 велико. Формула должны быть разного знака, для пересечения с 1. Использование формулы, при нулевой действительной части начальных условий, приводит к огромному отклонению на конечном отрезке, и его трудно реализовать, но отклонения имеют разный знак. В случае если начальные условия имеют действительную часть, и мнимая часть стремится к нулю получаются отклонения одинакового знака и дискретных значений времени нет. Идеология ясна, нужно большое значение мнимых частей начальных условий для получения дискретного момента времени. При бесконечности мнимой части решения получается вырожденное решение с бесконечной волновой функцией. При средней мнимой части решения реализуется отклонение от 1 и, следовательно, дискретное время. Но до определенного предела малой мнимой части, удовлетворяющей соотношению неопределенности, причем образуется дыра в комплексном пространстве в случае неудовлетворения соотношения неопределенности.

Дискретное значение времени определяется из формулы

$$\frac{\coth^2 \operatorname{Im} kx(t,x_0)}{\sinh^2 \operatorname{Im} kx(t,x_0) \sin^2 \operatorname{Re} kx(t,x_0)} = \frac{\cot^2 \operatorname{Re} kx(t,x_0)}{\sinh^2 \operatorname{Im} kx(t,x_0) \sin^2 \operatorname{Re} kx(t,x_0)}$$

$$\coth^2[-\ln|\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}\,|] = \cot^2 \arg(\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2})$$

$$\beta = \exp[i\frac{\hbar k^2(t-t_0)}{m}]\cos kx_0$$

Как показал численный расчет переход к комплексному решению наблюдается при большой мнимой части координаты положительной или отрицательной, при бесконечной мнимой части наблюдается вырождение закона сохранения энергии, правая и левая часть этого закона одинакова. Кроме того, волновая функция стремится к бесконечности, что нарушает квантовые законы.

Но когда время дискретно, а когда непрерывно? Характерное время стационарного процесса много больше интервала дискретизации, и тогда надо использовать непрерывное время. Излучение энергии электроном в атоме происходит быстро и надо использовать дискретные моменты времени. Реакции обмена и разложения происходят быстро и надо использовать дискретное время, частицы распадаются на частицы вакуума и группируются в элементарные частицы с помощью частиц вакуума. В интервале между скачками, волновая функция элементарных частиц описывается уравнением

$$\psi = \exp\{i\frac{\mathrm{Re}(E_n - E_m)t - \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Re}[(p_{nk} - p_{mk})(x_k - x_{k0})]}{\hbar}\}$$

В случае квантовой электродинамики дискретным является интервал, координата, энергия и импульс при малой постоянной времени. Комплексная энергия и импульс определяются из формул, где начальные условия комплексные

$$mc\frac{dx_k}{ds} = p_k = -i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{\partial x_k}$$

$$mc^2\frac{dt}{ds} = p_0 = E/c = i\hbar\frac{\partial \ln\psi}{c\partial t}; \psi = \psi(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

$$ct = ct(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0); x_k = x_k(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0);$$

Запишем закон сохранения релятивистской энергии для действительной части комплексной энергии

$$[\frac{dx_0(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial s}]^2 = \frac{E_n^2}{m^2c^4} = [\frac{dx_k(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial s}]^2 + \frac{U}{mc^2} + 1$$

$$\frac{E_n^2}{m^2c^4} = [\frac{d\,\mathrm{Re}\,x_k(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial s}]^2 - [\frac{d\,\mathrm{Im}\,x_k(s, t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial s}]^2 + \frac{U}{mc^2} + 1$$

Так как связь между операторами не распространяется на функции, значит эта связь реализуется при дискретных интервалах, и, значит, дискретных импульсах, энергиях и координатах.

В нерелятивистском случае для атома водорода эта формула выглядит таким образом

$$\frac{E_n - m_e c^2 - U}{m_e c^2} = -\frac{1}{2\cdot 137^2 n^2} + \frac{e^2}{m_e c^2 r} =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 137^2}\{\mathrm{Re}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r-a_k} + \frac{l+1}{r} - \frac{1}{n})^2 + (\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta}{r(\cos\theta - b_k)})^2] -$$

$$-\mathrm{Im}[(\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r-a_k} + \frac{l+1}{r} - \frac{1}{n})^2 + (\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta}{r(\cos\theta - b_k)})^2] \to -\frac{1}{2\cdot 137^2 n^2}; \mathrm{Im}\, r \to \infty; \mathrm{Im}\,\theta \to \infty$$

При мнимых координатах, стремящихся к бесконечности эта формула превращается в тождество. Значит переход к бесконечной мнимой части параметров атома водорода соответствует получению тождества вместо закона сохранения энергии. Это не классическое описание, а вырождение квантового. Переход к классическому описанию соответствует росту массы до определенного предела, когда начинается квантовая механика для планет и звезд.

Выполнение уравнения в действительном пространстве сводится к уравнению

$$\frac{1}{n^2} = (\sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{r-a_k} + \frac{l+1}{r} - \frac{1}{n})^2 + [\sum_{k=1}^{n_\theta} \frac{\sin\theta}{r(\cos\theta - b_k)}]^2 + \frac{2}{r}$$

Член зависящий от углов можно приравнять нулю, хотя это не очевидная замена, угол зависит от времени. Остаток от этого уравнения не имеет действительного решения, кроме радиуса, стремящегося к бесконечности. При условии радиуса, равного $r = 2n^2$ выполняется условие $\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{2n^2 - a_k} - \frac{l+1}{2n^2} > \frac{1}{n} - \frac{n_r}{n^2} - \frac{l+1}{2n^2} > \frac{l+1}{2n^2} > 0$ и равенство нулю не выполняется. Доказано что в действительном пространстве закон сохранения энергии не выполняется.

Период времени между дискретными значениями времени для атома водорода при не релятивистских формулах определяется по формуле $\Delta\tau = \frac{m_e a_0^2}{\hbar} = 0.25\cdot 10^{-16} s$, см. [3]. Или энергия смерти и рождения равна

$E_n = m_e c^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}\frac{1}{n^2} = m_e c^2 - \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$ энергии электрона в атоме. Причем одной энергии соответствует счетное количество времен. Т.е. электрон периодически распадается, излучив энергию, и группируется вновь, получив другую энергию. Часть энергии $\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$ расходуется на фазовый переход или на излучение электромагнитной волны. Возможен и другой процесс получение энергии электроном, причем другой энергии соответствует другое счетное количество времен. Причем каждому уровню энергии соответствует своя частица вакуума. Распад и группировка частицы связаны с переходом на другие частицы вакуума с другим рангом, причем ранг частицы вакуума соответствует главному квантовому числу. Поэтому уничтожение и рождение электрона, состоящего из разных частиц вакуума, необходимый процесс излучения и поглощения энергии.

Но действительные параметры должны удовлетворять действительным законам сохранения, а комплексные параметры комплексным законам сохранения. Отмечу, что введение понятия траектории в комплексном пространстве обосновано аналогией между решениями квантовой механики и уравнений Навье-Стокса, которая доказана в тексте статьи. Остается только уповать на отсутствие понятий траектории в действительном пространстве. Но скрывать, что введение понятие траектории приведет к нарушению законов сохранения энергии не перспективно. Необходимо сказать, что физики придумали операторный закон сохранения энергии, вместо того, чтобы использовать функции скорости и координаты, причем операторы сохраняются, и построенные на их основе значения сохраняются, причем вычисленная энергия удовлетворяет эксперименту, а использование непрерывных значений функций скорости и координаты не удовлетворяет эксперименту. Дискретные комплексные координаты и скорости тоже удовлетворяют эксперименту, но содержат логическое противоречие, сохраняется только действительная часть энергии, хотя координаты и скорости комплексные. Действительная собственная энергия определяется независимым образом из уравнений квантовой механики и может служить основой для действительной части комплексного закона сохранения. При этом определится мнимая часть собственной энергии и тогда логическое противоречие снимается. Но эта мнимая часть связана с турбулентным значением энергии, а не с затуханием. Турбулентная действительная энергия равна среднему – действительной части плюс мнимая часть, умноженная на синус фазы, которая равна произведению частоты на время. Частота равна релятивистской собственной энергии, деленной на постоянную Планка.

При переходе с одного уровня энергии на другой происходит излучение энергии по формуле плоской волны у физического смысла комплексной энергии

$$E = \mathrm{Re}(E_n - E_m) + \mathrm{Im}(E_n - E_m)\sin\frac{\mathrm{Re}(E_n - E_m)t - \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Re}[(p_{nk} - p_{mk})(x_k - x_{k0})]}{\hbar}.$$

Формула для дискретного импульса и начального значения координаты образуется при вычислении энергии. Причем считается амплитуда излученной волны.

Комплексные, дискретные импульсы создают проблему для преобразования Лоренца. Но этой проблемы пока не будем касаться.

Выводы

Для выполнения закона сохранения энергии при описании элементарных частиц в потенциальной яме удовлетворяют закону сохранения энергии только дискретные периодические моменты времени для действительной части энергии при вычислении траектории в комплексном пространстве. В действительном пространстве вообще закон сохранения энергии не удовлетворяется ни в одной точке. При этом скорость тоже является дискретной. Скорость существует одно мгновение, так как координата дискретная. Использование частиц вакуума объясняет этот факт, элементарные частицы образуются из частиц вакуума и распадаются на частицы вакуума. При переходе к бесконечной мнимой части решения наблюдается тождественное равенство полной энергии системы собственной энергии. Причем это общий случай квантовой механики. Для атома водорода при излучении или поглощении энергии тоже имеется две не согласованные (каждая переменная зависит от своего произвольного начального условия) зависимости координат (радиуса и угла) от времени и уравнения закона сохранения энергии удовлетворяются в дискретные моменты времени. Дискретные моменты времени справедливы для систем с разделяющимися переменными у волновой функции. В случае волновой функции общего вида имеется общее свойство отдельных координат, они зависят от одной волновой функции. Но будет ли оно дискретным? При малом характерном времени время является дискретным. Это подтверждает численный эксперимент для потенциальной ямы при равенстве нулю квантового члена закона сохранения энергии. Причем закон сохранения энергии при большой постоянной времени выполняется для действительной части энергии при комплексных координатах и скорости. В случае квантовой электродинамики дискретны интервал, координаты и время, энергия и импульс при малом характерном времени. Так как имеется аналогия с комплексным, турбулентным решением в гидродинамике с комплексным решением в квантовой механике, надо задуматься над дискретным решением в гидродинамике. Но при бесконечной мнимой части начальных условий время непрерывное, но система вырожденная. Но скачки скорости в турбулентном режиме существуют, что приводит к кавитации.

3. Связь уравнения ОТО и квантовой механики при ненулевой кривизне комплексного пространства-времени

В статье «Связь квантовой механики и ОТО в комплексном пространстве» установлена связь между квантовой механикой и ОТО с нулевой кривизной. Получим эту связь в общем случае ненулевой кривизны. Для этого воспользуемся решением ОТО и квантовой механики относительно разных интервалов, что возможно в случае комплексного пространства. Определяется связь между волновой функцией и метрическим тензором, причем обе величины параметрически зависят от разных интервалов, для которых определена связь. Определяется также разная зависимость координаты и времени от разных интервалов в ОТО и квантовой механике. Получается ненулевая кривизна ОТО. При этом обе теории описывают линии тока в комплексном пространстве, которые пересчитываются в действительное пространство.

Уравнение Навье-Стокса эквивалентно уравнению квантовой механике, между ними связь $p_n = mV_n = -i\hbar \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^n}$, где имеем связь между волновой функцией квантовой механики и импульсом или скоростью уравнения Навье-Стокса. При этом для массивных тел справедливо уравнение квантовой механики с эффективной постоянной Планка $\hbar_{eff} = \hbar(1 + \frac{137m^2}{m_{Pl}^2})$ см. [4], которая при малой массе равна постоянной Планка. При большой массе справедлива квантовая механика макротел, так как для массивных тел справедливо уравнение Навье-Стокса в среде вакуума с эффективной постоянной Планка. С другой стороны, метрический тензор ОТО нужно подставлять в уравнение квантовой механики, для правильного учета пространства-времени. Причем для описания элементарных частиц надо использовать другую ветвь единого поля – электромагнитного, гравитационного и звукового. Надо использовать электромагнитное поле, для которого можно построить уравнение ОТО. Причем электромагнитная теория ОТО отличается от общепризнанной см. [8].

Соответственно решение дифференциального уравнения Клейна-Гордона в электромагнитном поле определяет комплексную линию тока или траекторию в комплексном пространстве. Траектории элементарных частиц в комплексном пространстве возможны, так как мнимая часть описывает среднеквадратичное отклонение и удовлетворяет соотношению неопределенности. Аналогично ОТО описывает траектории по инерции, т.е. линии тока, касательные к которым описывают скорости частиц. Используется эффективная постоянная Планка, при малой массе она равна стандартной квантовой механике, а при большой массе - ОТО, теория может быть использована при произвольной массе, с некоторыми оговорками, для тел в атмосфере Земли надо вводить действительную кинематическую вязкость. Итого кинематическая вязкость окажется действительной, а постоянная Планка, деленная на большую массу будет равна нулю, что противоречит свойствам квантовой механике, кинематическая вязкость мнимая. Действительная кинематическая вязкость - это свойство массы элементарных частиц быть в число Авогадро раз меньше, чем масса тел. Для планет и звезд - кинематическая вязкость среды мнимая и квантовая механика не встречает преград, что по-видимому связано с отношением массы планет и звезд к массе элементарных частиц.

$$\begin{gathered} p_n = mcu_n = mc\frac{dx_n}{ds} = -i\hbar_{eff}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^n}; n = 1,...,3 \\ p_0 = mcu_0 = mc\frac{dx_0}{ds} = i\hbar_{eff}\frac{\partial \ln\psi}{\partial x^0} \end{gathered} \quad (1)$$

В результате решения дифференциального уравнения (1) определится функция $x_n = x_n(s, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0), n = 0,...,3$, где начальные условия комплексные, чтобы обеспечить комплексные импульс и энергию. Причем не удовлетворяющая соотношению неопределенности часть параметров должна быть опущена. Т.е. в комплексном пространстве имеются дыры равные действительной части с малой мнимой частью. Эти дыры – аналог кротовых нор в ОТО. Волновая функция равна

$$\psi = \exp[i\int (mcu_0 dX^0 + mcu_n dX^n)/\hbar_{eff}] = \exp[i\int (mcu_0 U^0 + mcu_n U^n) dS)/\hbar_{eff}] =$$
$$= \exp\{imc\int [[u_0(s,X^0) - U_0(S,X^0)]U^0(S,X^0) + [u_n(s,X^0) - U_n(S,X^0)]U^n(S,X^0)]dS/\hbar_{eff} +$$
$$+ imc(S - S_0)/\hbar_{eff}\}$$

Решить это уравнение надо методом итераций, начальное приближение $\psi(s, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \exp[imc(S - S_0)/\hbar_{eff}]$. Если исследуется элементарная частица, то интервал S сравним по величине с интервалом квантовой механики. Если рассматривается массивная частица, то у нее другая эффективная постоянная Планка, причем интервал S велик.

Где для произвольного приращения координат-времени используется интервал ОТО. Откуда получаем связь между интервалами. Получается, что ОТО и квантовая механика эквивалентны. И интервал равен

$$S - S_0 = \frac{i\hbar_{eff}}{mc} f(\ln\psi, s); g_{nm} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^n \partial x^m} = -(\frac{\hbar_{eff}}{mc})^2 \frac{\partial^2 f(\ln\psi, s)}{\partial x^n \partial x^m} =$$
$$= -(\frac{\hbar_{eff}}{mc})^2 \frac{\dfrac{d^2 f(\ln\psi, s)}{ds^2}}{\dfrac{dx^n}{ds}\dfrac{dx^m}{ds}} = g_{nm},$$

где частная производная по координате определяется из параметрической зависимости логарифма волновой функции и координаты от интервала. Справедливо и обратное соотношение. Имеем волновую функцию, зависящей от интервала, и значит справедливо $f[\psi(s, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0), s] = \exp\{imc[S - S(x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]/\hbar_{eff}\}$. Начальные условия для уравнения ОТО и квантового уравнения общие.

Получается, что в макромире все действительные координаты имеют мнимую часть, для удовлетворения соотношению неопределенности. Эта мнимая часть флуктуации среднего значения параметра см. [2], которые в макромире всегда существуют, так как макромир состоит из элементарных частиц.

Получается, что любое решение уравнения ОТО связано с волновой функцией, так как для нее справедливо

$$dS^2 = \sum_{n,m=0}^{3} \frac{d^2 S(s,X^0)}{dx^n(s,X^0)dx^m(s,X^0)} dx^n(s,X^0)dx^m(s,X^0) =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{3} -(\frac{\hbar_{eff}}{mc})^2 \frac{d^2 f[\ln\psi(s,X^0),s]}{dx^n(s,X^0)dx^m(s,X^0)} dx^n(s,X^0)dx^m(s,X^0) =$$

$$= -\sum_{n,m=0}^{3} (\frac{\hbar_{eff}}{mc})^2 \frac{\frac{d^2 f[\ln\psi(s,X^0),s]}{ds^2}}{\frac{dx^n(s,X^0)}{ds}\frac{dx^m(s,X^0)}{ds}} dx^n(s,X^0)dx^m(s,X^0) =$$

$$= \sum_{m=0}^{3} dx_m(s,X^0)dx^m(s,X^0) = \sum_{n,m=0}^{3} g_{nm}[S(s,X^0),X^0]dx^n[S(s,X^0),X^0]dx^m[S(s,X^0),X^0];$$

$$X^0 = (x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0); g_{nm}[S(s,X^0),X^0] = -(\frac{\hbar_{eff}}{mc})^2 \frac{\frac{d^2 f[\ln\psi(s,X^0),s]}{ds^2}}{\frac{dx^n(s,X^0)}{ds}\frac{dx^m(s,X^0)}{ds}}$$

Где использовали зависимость между интервалами $S = S(s,X^0)$. Производная по координате определяется как отношение производной логарифма волновой функции по интервалу к производной координаты по интервалу, так как волновая функция и координаты являются функциями интервала. Повторная производная приводит ко второй производной по интервалу. Отметим, что метрический тензор безразмерный. Это общее решение уравнения ОТО и квантовой механики. Где волновая функция и метрический тензор зависят от начальных условий и разных связанных интервалов.

Зная метрический тензор уравнения ОТО можно вычислить символ Кристоффеля и по нему из первой ковариантной производной скорости по интервалу определить зависимость четырехмерной скорости и координат от интервала, а значит и зависимость метрического тензора от интервала ОТО, который связан с интервалом квантовой механики. Все это реализуется для ненулевой кривизны. При этом установлена связь между интервалом ОТО и волновой функцией, зависящей от интервала квантовой механики.

Получается, установив связь волновой функции и координат от интервала квантовой механики, интервала ОТО от интервала квантовой механики, и мы можем связать решения ОТО и квантовой механики. Четырехмерные скорости, координаты-время и интервалы отличаются.

4. Связь между массами элементарных частиц и массами планет

Существование квантовой механики элементарных частиц и тел большой массы накладывает связь между массами элементарных частиц и тел большой массы. Эта связь выражается в уравнении связи массы элементарных частиц и тел большой массы.

Используя характерный радиус элементарных частиц и массивных тел, получаем уравнение $\lambda_\alpha = \frac{2Gm_\alpha}{c^2} + \frac{2e^2}{m_\alpha c^2}$, описывающее сумму гравитационного радиуса электромагнитного и гравитационного поля. Имеем в общем случае два корня, равных

$$m_\alpha = +\frac{\lambda_\alpha c^2}{4G} \pm \sqrt{(\frac{\lambda_\alpha c^2}{4G})^2 - \frac{e^2}{G}}.$$

Причем при большой величине $\frac{\lambda_\alpha c^2}{2G}$, что соответствует размеру элементарных частиц, имеем два действительных корня $m_\beta = \frac{\lambda_\alpha c^2}{2G}, m_\alpha = \frac{2e^2}{\lambda_\alpha c^2}$

, т.е. при величине

$$\lambda_\alpha = r_{ge} = \frac{2e^2}{m_e c^2},$$

равной радиусу электрона, получим две частицы. Одна с массой электрона, а другая массивная частица

$$m_\beta = \frac{\lambda_\alpha c^2}{2G} = \frac{e^2}{m_e G} = \frac{\hbar c}{137 m_e G} = \frac{m_{Pl}^2}{137 m_e} \approx \frac{(2.2\cdot 10^{-5})^2}{137\cdot 10^{-27}} = 3.53\cdot 10^{15} g\ .$$

При этом массе частицы, равной $m = m_{Pl}/\sqrt{137} = \sqrt{\frac{\hbar c}{137G}}$, соответствует такая же масса парной частицы. При этом длина Планка равна $l_{Pl} = \lambda_\alpha = \frac{\sqrt{137}e^2}{m_{Pl}c^2} = \frac{\sqrt{137}\hbar}{m_{Pl}c137} = \sqrt{\frac{\hbar G}{137c^3}}$. Величина времени Планка равна $t_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{137\, c^5}}$. При этом константы Планка определены с точностью до множителя. Соображения, описанные выше, позволяют оценить этот множитель.

Можно записать значение уравнение закона Ньютона для большой действующей силы

$$\frac{a(t)}{a_{Pl}}\mathbf{e} = (1-\sqrt{1-\frac{2F}{ma_{Pl}}})\mathbf{e} = \frac{F\mathbf{e}}{ma_{Pl}} - \frac{(F/ma_{Pl})^2}{2}\mathbf{e} + ...;$$
$$|\frac{2F}{ma_{Pl}}| = |\frac{2l_{Pl}^2 M}{r_{cr}^2 m_{Pl}}| = |\frac{2l_{Pl}^2 m_{Pl}}{137 r_{cr}^2 m}| << 1, a_{Pl} = \frac{c}{t_{Pl}}; \frac{M}{m_{Pl}} = \frac{m_{Pl}}{137m} >> 1,$$

где величина 1 играет роль критического числа Рейнольдса. В начальный момент образования Вселенной ускорение было огромным. В момент Большого взрыва произошла флуктуация силы $\sqrt{-2F_{cr}\alpha^2/ma_{pl}} = i\alpha,$ которая обеспечивает критическое значение силы, подкоренное выражение становится отрицательным, образуется комплексное большое ускорение $a(t) = a_{Pl}(1-i\alpha)$ и образовался взрыв, при переходе к комплексному решению см. [9]. В данной статье описан переход энергетического уравнения к комплексной температуре, которое сопровождается взрывом. Но в данном случае происходит переход ускорения к комплексному значению, которое тоже сопровождается большим значением решения и как следствие взрывом. При этом флуктуация должна обеспечить равенство $\alpha = \frac{c^2}{r_m a_{Pl}} = \frac{mc^4}{a_{Pl}e^2} = \frac{137m}{m_{Pl}}$, чтобы образовалась элементарная частица массы m. Для того, чтобы образовалось массивное тело массы M нужна флуктуация $\alpha = \frac{2c^2}{r_g a_{Pl}} = \frac{c^4}{GMa_{Pl}} = \frac{m_{pl}}{M}$. Промежуточные тела не образуются, для них нужна флуктуация, равная 1. При этом имеется соотношение $\max M \min m = m_{Pl}^2 / 137$. Но флуктуации являются не случайными, а строго вычисляемыми, причем имеется равенство флуктуаций. Это следует из формулы для связи между массами. Получается, что массы массивных и элементарных частиц связаны. Но массы планет и звезд имеют дополнительный коэффициент $\frac{10^{27} 0.511}{0.911}$. Получается, что массы планет и звезд образовались из массивных элементарных частиц, увеличив свою массу ровно в $\frac{10^{27} 0.511}{0.911}$ раз. Возможно массивные элементарные частицы образовали ядро планет и звезд.

Массы элементарных частиц считались по алгоритму, приведенному в [10].

Приведу таблицу возможных масс планет, в частности Солнечной системы

zzm =

	0
0	0
1	475.381
2	361.455
3	274.828
4	208.959
5	158.876
6	120.794
7	91.84
8	69.825
9	53.086
10	40.36
11	30.684
12	23.327
13	17.734
14	13.482
15	10.249
16	7.792
17	5.923
18	4.503
19	3.423
20	2.602
21	1.978
22	1.504
23	1.143
24	0.869
25	0.66
26	0.502
27	0.382
28	0.29
29	0.22
30	0.168
31	0.127
32	0.097
33	0.074
34	0.056

zzx =

	0
0	0
1	315.88
2	240.179
3	182.617
4	138.849
5	105.569
6	80.265
7	61.025
8	46.397
9	35.275
10	26.818
11	20.389
12	15.501
13	11.784
14	8.959
15	6.811
16	5.177
17	3.936
18	2.992
19	2.275
20	1.729
21	1.314
22	0.999
23	0.759
24	0.577
25	0.439
26	0.334
27	0.254
28	0.193
29	0.146
30	0.111
31	0.085
32	0.064
33	0.049

Таблица составлена из отношения массы планеты к массе земли

причем имеется два независимых значения массы планеты, что соответствует двум множителям учета электромагнитной массы

Главное квантовое число или Ранг мультиполя		Масса относительно Земли экспериментальная	Масса относительно Земли теоретическая
175	Меркурий	0.0565	0.056
165	Венера	0.86	0.869
177	Земля	1	0.999
171	Марс	0.16	0.146
156	Юпитер	321.0	315.9
148	Сатурн	92	91.8
150	Уран	52	53.086
167	Нептун	15	17.73
165	Плутон	0.861	0.869
118	Солнце	$3.33*10^5$	$3.396*10^5$

Масса планет и звезд M_n в граммах считалась через массу элементарных частиц m_n по формуле $M_n = \frac{m_{Pl}^2}{137 m_n} k$; с безразмерным коэффициентом $k = \frac{10^{27} 0.511}{0.911}$, аналог числа Авогадро. Совершенно случайно он оказался равным отношению массы электрона в Мэв к массе электрона в граммах. Он описывает пропорциональность частицы большой массы массе планеты, коэффициент пропорциональности приближенно оценен. Это не значит, что планета состоит из частиц большой массы. Это значит, что при образовании планеты частица большой массы образует планету определенной массы.

При этом обе части формулы разделены на массу Земли в граммах. Безразмерная величина слева и справа равна $\frac{M_n}{M_{earth}} = \frac{m_{Pl}^2}{137 m_n M_{earth}} k; M_{earth} = 5.976 \cdot 10^{27} g$. Этот введенный коэффициент как гравитационная постоянная, связывающая величины с разной известной размерностью. Причем масса элементарных частиц m_n зависит от ранга мультиполя частиц вакуума или главного квантового числа. Масса Земли определяется как коэффициент, равный 0.999. Относительная ошибка, вычисленная по формуле $\sum_{n=1}^{10} \frac{|M_{n\exp er} - M_{ntheory}| 2 \cdot 100}{9(M_{n\exp er} + M_{ntheory})} = 3.5\%$. Средний множитель между соседними массами всех кандидатов в планеты равен $(\frac{M_{\max}}{M_{\min}})^{1/34} = 1.3$. Массы соседних планет отличаются на 30%. Значит ошибка в 3.5% точно отражает массы планет и не совпадает с шагом дискретизации. Получается, что вычисления масс планет является достоверным.

Имеем формулу для гравитационного радиуса частицы большой массы

$$r_{gn} = \frac{2\gamma M_n}{c^2}; M_n = \frac{m_{Pl}^2}{137 m_n} k$$

Получается, что гравитационный радиус тела большой массы выражается через главное квантовое число или ранг частиц вакуума.

Список литературы

1. Якубовский Е.Г. По поводу преобразований Лоренца «Энциклопедический фонд России», 2019, 115 стр. http://www.russika.ru/userfiles/390_1620069631.pdf
2. Якубовский Е.Г. Кинематика описания турбулентного потока с помощью комплексной скорости «Энциклопедический фонд России», 2019, 8 стр. http://www.russika.ru/userfiles/390_1628035056.pdf
3. Якубовский Е.Г. Зависимость от радиуса и углов полной энергии атома

   Globus: Технические науки Том: 7 Номер: 2 (38) Год: 2021 Стр. 21-24
4. Якубовский Е.Г. Квантовая механика для тел большой массы «Энциклопедический фонд России», 2019, 9 стр. http://www.russika.ru/userfiles/390_1599325420.pdf
5. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION I. THE GENERAL SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 60-66. https://world-science.ru/pdf/2016/3/14.pdf
6. YAKUBOVSKIY, EG. "STUDY OF NAVIER-STOKES EQUATION SOLUTION II. THE USE OF LAMINAR SOLUTIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 67-83.https://world-science.ru/pdf/2016/3/15.pdf
7. YAKUBOVSKIY, E. G. "STUDY OF NAVIER–STOKES EQUATION SOLUTION III. THE PHYSICAL SENSE OF THE COMPLEX VELOCITY AND CONCLUSIONS." *EUROPEAN JOURNAL OF NATURAL HISTORY* 3 (2016): 84-87. https://www.world-science.ru/pdf/2016/3/16.pdf
8. Якубовский Е.Г. Общая теория гравитационного и электромагнитного поля. «Энциклопедический фонд России», 2015, 19 стр. http://russika.ru/sa.php?s=434

9. Якубовский Е.Г. Описание детонационных процессов в газообразных средах с помощью решения уравнений гидродинамики. «Энциклопедический фонд России», 2017, 24 стр. http://www.russika.ru/userfiles/390_1481998007.pdf
10. Якубовский Е.Г. Использование свойств частиц вакуума «Энциклопедический фонд России», 2021, 44 стр. http://russika.ru/sa.php?s=2009
11. Вергелес С.Н. Лекции по квантовой электродинамике М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008, 248стр.